Questões	Valores	Notas
1.^{a}	2.5	
2.^{a}	2.5	
3.^{a}	2.5	
4.^{a}	2.5	
Total	10.0	

Simulado Prova 3 de MA- 327– Álgebra Linear

2.^{o} semestre de 2023

Nome:____________________

RA:____________________

Turma:____________________

1.^{a} Questão. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T(x, y, z) = (x, x + 2y, -3x - 3y - z)$$

e seja $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

a) Calcule os autovalores de T. (0.5 ponto)

b) Determine o autoespaço associado a cada autovalor de T. (1.0 ponto)

c) Diagonalize T, ou seja, encontre uma matriz diagonal D e uma matriz invertível P de forma que

$$D = P^{-1} \cdot [T]_{\beta}^{\beta} \cdot P.$$

(1.0 ponto)

2.^{a} Questão. Seja $V = C^1[0,1]$ o espaço das funções reais diferenciáveis e com derivada contínua, munido do produto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Considere o subespaço $W = \{f(t) \in V : f(0) = f(1) = 0\}$ e o operador $T : W \longrightarrow V$ definido por

$$T(f)(t) = f''(t).$$

Mostre que T é simétrico. (2.5 pontos)

3.^{a} Questão.

1) (1.0) Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfazendo $ac > b^2$ e $a > -c$. Mostre que A é positiva definida.

2) (0.5) Determine se a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{pmatrix}$ é positiva definida.

3) (1.0) Determine se a matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ é ortogonal.

4.^{a} Questão. Considere o espaço vetorial real $P_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Determine a projeção ortogonal do elemento $q(t) = t^2$ sobre o subespaço $W = [1, t^2]$. (2.5 pontos)

Bônus No espaço das funções reais contínuas $C[1,3]$ com o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_1^3 f(t)g(t)dt$, seja $f(t) = 1/t$. Mostre que o polinômio constante mais próximo de $f(t)$ é dado por $g(t) = \frac{1}{2}\log 3$. Calcule a distância entre g e f. (2.5 pontos)

Boa Prova!