MA327 Álgebra Linear - Gabarito Simulado Prova 2

1.^{a} Questão. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear, $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e suponha que

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine a expressão para $T(x, y, z)$. (2.5 pontos)

Dada a matriz da transformação em relação à base B vamos computar $[T(v)]_B = [T]_B^B[v]_B$, onde $[v]_B$ é o vetor de coordenadas em relação à base B $\forall v \in \mathbb{R}^3$. Seja $v = (x, y, z)$ segue que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

obtemos,

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z \end{pmatrix}$$

Logo computamos T em relação à base B,

$$\begin{aligned} \left[T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]_B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x-y+z \\ -y+2z \\ x-y+2z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por último usamos esse resultado para expressar T em relação à base canônica.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x-y+z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-y+2z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (x-y+2z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y+5z \\ x-2y+4z \\ x-y+2z \end{pmatrix}.$$

2.^{a} Questão. Para cada uma das afirmações a seguir, diga se ela é Falsa ou Verdadeira, justificando sua resposta. (3 pontos)

a) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que é injetora.

Note que $dim(Im(T)) \leqslant 3$, pelo teorema de núcleo e imagem temos que

$$
\begin{aligned}
4-dim(Ker(T)) &= dim(Im(T)) \leqslant 3 \\
dim(Ker(T)) &\geqslant 1,
\end{aligned}
$$

logo $Ker(T) \neq \{0\}$. Portanto não existe transformação linear injetora nestas condições.

b) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que é sobrejetora.

Considere a matriz de transformação dada por:

$$
T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Note que $posto(T) = 3$ pois possui 3 vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$, logo $dim(Im(T)) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$, i.e., a dimensão da imagem é igual a dimensão do espaço de chegada, logo T é sobrejetora. Portanto existe transformação linear sobrejetora nestas condições.

c) Existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que é bijetora.

Suponha que existe uma transformação linear injetora, assim $dim(Ker(T)) = 0$, segue que pelo teorema de núcleo e imagem $dim(Im(T)) = 2 \leqslant 3 = dim(\mathbb{R}^3)$, logo T não é sobrejetora. Portanto não existe transformação linear bijetora nestas condições.

3.^{a} Questão. Considere em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno definido por

$$
\langle p(t), q(t) \rangle = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}
$$

com $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$.

a) (1.0) Calcule $\|p(t)\|$ para qualquer $p(t) \in P_2(\mathbb{R})$, onde $\| \cdot \|$ é a norma induzida pelo produto interno acima.

Sabe-se que $\forall p(t) \in P_2(\mathbb{R})$ temos, $\|p(t)\|^2 = \langle p(t), p(t) \rangle$. Segue que,

$$
\langle p(t), p(t) \rangle = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.
$$

Portanto,

$$
\| p(t) \| = \sqrt{2a_0^2 + a_1^2 + 2a_2^2 - 2a_0 a_1 + 2a_0 a_2 - 2a_1 a_2}
$$

b) (1.0) Considere os vetores $p_1(t) = 1 + t$, $p_2(t) = t$ e $p_3(t) = t + t^2$. Mostre que $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ é uma base ortonormal de $P_2(\mathbb{R})$.

Vamos verificar que o produto interno entre os vetores do conjunto é igual a 0,

$$\langle p_1(t), p_2(t)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\langle p_1(t), p_3(t)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\langle p_2(t), p_3(t)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Por último vamos verificar que a norma dos vetores é igual a 1,

$$\| p_1(t)\|^2 = \langle p_1(t), p_1(t)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\| p_2(t)\|^2 = \langle p_2(t), p_2(t)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\| p_3(t)\|^2 = \langle p_3(t), p_3(t)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Portanto o conjunto $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ é ortonormal.

c) (1.0) Calcule as coordenadas de um polinômio qualquer $p(t) \in P_2(\mathbb{R})$ em relação a esta base.

Computar as coordenadas de um vetor qualquer em relação a uma base ortogonal equivale a computar os coeficientes de Fourier do vetor em relação à base dita. Seja $p(t) \in P_2(\mathbb{R})$ tal que $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, escrevendo como combinação linear dos elementos da base $B = \{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ temos,

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = \alpha_1(1+t) + \alpha_2(t) + \alpha_3(t+t^2) \qquad , \alpha_i = \frac{\langle p(t), p_i(t)\rangle}{\langle p_i(t), p_i(t)\rangle}$$

Temos que para a base dada $\langle p_i(t), p_i(t)\rangle = 1$, logo

$$\alpha_1 = \langle p(t), p_1(t)\rangle = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_0.$$

$$\alpha_2 = \langle p(t), p_2(t)\rangle = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -a_0 + a_1 - a_2$$

$$\alpha_3 = \langle p(t), p_3(t)\rangle = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_2.$$

Portanto,

$$[p(t)]_B = \begin{pmatrix} a_0 \\ -a_0 + a_1 - a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

4.^{a} Questão. O conjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - z = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Encontre uma base ortonormal pra este subespaço. (1.50 ponto)

Dado o subespaço V, uma base para V é dada por $\beta = \{v_1, v_2\}$ com

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Usando o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$ vamos verificar que o conjunto β não é ortogonal.

$$\langle v_1, v_2\rangle = 1(0) + 0(1) + 2(3) = 6 \neq 0.$$

Vamos ortonormalizar o conjunto β pelo processo de Gram-Schmidt. A ideia é procurar um conjunto ortonormal $\gamma = \{q_1, q_2\}$ tal que $span\{v_1, v_2\} = span\{q_1, q_2\}$. Segue então

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{\langle v_1, v_1\rangle}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{q_2} = -\frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + v_2 = -\frac{6}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6/5 \\ 1 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

Consideramos $\hat{q_2}$ como sendo $\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Por último

$$q_2 = \frac{\hat{q}_2}{\|\hat{q}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Portanto $\gamma = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base ortonormal para V.