MA327 Álgebra Linear - Gabarito Prova 3

Aplicada em 30/11/2023

Turmas 08h-10h

Questão 1. Sejam V espaço vetorial real de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T : V \to V$ um operador linear. Mostrar que:

a) [1,25 ponto] Se T é simétrico e ortogonal, então $T^2 = I$.

b) [1,25 ponto] Se T é simétrico e $T^2 = I$, então T é ortogonal.

Dica: Considere uma base ortonormal β de V e utilize a matriz $A := [T]_\beta^\beta$.

Solução:

a) Seja $T : V \to V$ operador simétrico e ortogonal. Como V tem dimensão finita, tome $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de V e considere $A = [T]_\beta^\beta$. Como β é uma base ortonormal, sabemos que T ser simétrico e ortogonal, implica que A é uma matriz simétrica e ortogonal, ou seja, $A^t = A$ e $AA^t = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Assim,

$$[T^2]_\beta^\beta = A^2 = AA = AA^t = I_n = [I]_\beta^\beta.$$

Logo, $T^2 = I$.

b) Seja T simétrico tal que $T^2 = I$. Do mesmo modo, tome $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de V e considere $A = [T]_\beta^\beta$. Como β é uma base ortonormal, sabemos que T ser simétrico e $T^2 = I$, implica que A é uma matriz simétrica e $A^2 = I_n$. Assim,

$$AA^t = A^2 = I_n,$$

ou seja, A é uma matriz ortogonal. Logo, T é um operador ortogonal, pois β é uma base ortonormal.

Questão 2. [1,5 pontos] Encontre os autovalores e autovetores do operador $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido como

$$T(p(x)) = x \cdot p'(x),$$

para todo polinômio $p(x)$ em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Solução:

Observamos que

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 = 0 \cdot 1, \\ T(x) &= x = 1 \cdot x, \\ T(x^2) &= 2x^2 = 2 \cdot x^2, \\ T(x^3) &= 3x^3 = 3 \cdot x^3. \end{aligned}$$

Portanto,

- 0 é um autovalor, com autovetor associado 1;
- 1 é um autovalor, com autovetor associado x;
- 2 é um autovalor, com autovetor associado x^2; e
- 3 é um autovalor, com autovetor associado x^3.

Como cada um dos quatro autoespaços, V_0, V_1, V_2 e V_3, tem dimensão pelo menos 1 e $\dim \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = 4$, segue que esses são todos os autovalores (e autovetores associados) do operador T:

$$V_0 = [1], V_1 = [x], V_2 = [x^2] \text{ e } V_3 = [x^3].$$

Observação: Um segundo jeito de resolver essa questão é considerar $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ a base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e calcular $[T]_\beta^\beta$. Das contas acima, temos que

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonal, concluímos que os autovalores de T são os valores na diagonal principal, ou seja, 0, 1, 2 e 3, com autovetores associados 1, x, x^2 e x^3, respectivamente. Como cada autovalor tem multiplicidade algébrica 1, concluímos que cada autoespaço tem dimensão exatamente 1 (pois a multiplicidade geométrica é menor ou igual à multiplicidade algébrica) e, portanto, todos os autovetores foram encontrados:

$$V_0 = [1], V_1 = [x], V_2 = [x^2] \text{ e } V_3 = [x^3].$$

Questão 3. Considere a seguinte matriz real:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) [1 ponto] Mostre que o polinômio característico de A é $p_A(\lambda) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3)$.

b) [1,5 ponto] Para cada autovalor de A, determine os autovetores correspondentes.

c) [1,5 pontos] A matriz A é diagonalizável? Em caso afirmativo, dê uma matriz ortogonal Q de forma que $Q^t AQ$ seja diagonal.

Solução:

a) Por um lado,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2(-1-\lambda) + (-4) + (-4) - (-1-\lambda) - 4(2-\lambda) - 4(2-\lambda) \\ &= -(4 - 4\lambda + \lambda^2)(1+\lambda) - 23 + 9\lambda = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27. \end{aligned}$$

Por outro lado, desenvolvendo o polinômio dado no enunciado,

$$-(\lambda - 3)^2(\lambda + 3) = -(\lambda^2 - 6\lambda + 9)(\lambda + 3) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27.$$

Logo, $p_A(\lambda) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3)$.

b) Do polinômio característico, temos que os autovalores de A são $\lambda_1 = -3$ (com multiplicidade algébrica 1) e $\lambda_2 = 3$ (com multiplicidade algébrica 2).

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = -3$, precisamos estudar $\ker(A + 3I)$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} 5x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 2y - 2z &= 0 \\ x - 2y + 5z &= 0 \end{aligned} \right. .$$

Somando a terceira equação as duas primeiras, obtemos $z = -x$. Substituindo esse resultado na terceira equação, obtemos $y = -2x$. Portanto, os autovetores associados a $\lambda_1 = -3$ são da forma $\begin{pmatrix} x \\ -2x \\ -x \end{pmatrix}$ para $x \in \mathbb{R}$ não nulo. Podemos escolher o autovetor

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

associado ao autovalor $\lambda_1 = -3$.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$, precisamos estudar $\ker(A - 3I)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow -x + 2y + z = 0.$$

Portanto, os autovetores associados a $\lambda_2 = 3$ são da forma

$$\begin{pmatrix} 2y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para $y, z \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos. Podemos escolher os autovetores

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$.

c) A matriz A é diagonalizável, pois possui três autovetores linearmente independente. De fato, como A é uma matriz simétrica, poderíamos afirmar que A é (ortogonalmente) diagonalizável no início.

Para encontrar Q ortogonal como no enunciado, precisamos de um conjunto ortonormal de autovetores de A. Primeiro vamos nos preocupar em encontrar um conjunto ortogonal de autovetores, depois normalizamos.

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com produto interno usual e a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_\beta^\beta = A$, onde β é a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Os autovetores de T são $v_1 = (1, -2, -1)$ (associado ao autovalor $\lambda_1 = -3$) e $v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (2, 1, 0)$ (associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$)

Como A é uma matriz simétrica (consequentemente T é um operador simétrico), autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. Assim, podemos aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schimidt separadamente em cada autoespaço. Vamos aplicar o processo no conjunto $\{v_2, v_3\}$ (autovetores associados a $\lambda_2 = 3$):

$$\begin{aligned} q_1 &= v_2 = (1, 0, 1) \\ q_2 &= v_3 - \frac{\langle v_3, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 = (2, 1, 0) - \frac{\langle (2, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle}{\langle (1, 0, 1), (1, 0, 1) \rangle} (1, 0, 1) = (2, 1, 0) - (1, 0, 1) = (1, 1, -1). \end{aligned}$$

Normalizando, temos os autovetores $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Além disso, normalizando v_1, obtemos $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Seja $\gamma = \{u_1, u_2, u_3\}$, observamos que γ é uma base ortonormal de autovetores de T e

$$[T]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tome

$$Q = [I]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

ou seja, Q é a matriz formada ao colocar os autovetores em colunas. Como as colunas de Q formam uma base ortonormal, temos que Q é uma matriz ortogonal e, portanto, $Q^{-1} = Q^t$.

Assim,

$$Q^t A Q = [I]_\gamma^\beta [T]_\beta^\beta [I]_\beta^\gamma = [T]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Em particular, $Q^t A Q$ é diagonal.

Questão 4. [2 pontos] Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno canônico. Seja $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador de projeção ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sob o espaço

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 5z \text{ e } w = 7y\}.$$

Mostrar que $\ker P = [(1, 0, -5, 0), (0, -7, 0, 1)]$.

Solução:

Primeiro, observamos que um vetor qualquer de U é da forma

$$(5z, y, z, 7y) = z(5, 0, 1, 0) + y(0, 1, 0, 7).$$

Nomeando $u_1 = (5, 0, 1, 0)$ e $u_2 = (0, 1, 0, 7)$, temos que $U = [u_1, u_2]$. Também, como $\{u_1, u_2\}$ é linearmente independente, pois um não é múltiplo do outro, segue que $\dim U = 2$.

Assim, observando que $\text{Im}P = U$ (pois P é projeção ortogonal), segue, pelo Teorema Núcleo-Imagem, que

$$\dim \ker P = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Im}P = \dim \mathbb{R}^4 - \dim U = 4 - 2 = 2.$$

Além disso, nomeando $w_1 = (1, 0, -5, 0)$ e $w_2 = (0, -7, 0, 1)$, temos que w_1 e w_2 são ortogonais a cada um dos geradores de U e, portanto, $w_1, w_2 \in U^\perp$. Logo, por propriedade de projeção ortogonal, $P(w_1) = P(w_2) = 0$, ou seja, $w_1, w_2 \in \ker P$.

Como $\dim \ker P = 2$ e $\{w_1, w_2\}$ é linearmente independente, pois um não é múltiplo do outro, concluímos que $\ker P = [w_1, w_2] = [(1, 0, -5, 0), (0, -7, 0, 1)]$.

Observação 1: Um segundo jeito de resolver essa questão é calcular explicitamente a expressão de P. Observando que $\{u_1, u_2\}$ é uma base ortogonal de U, para $v = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, obtemos a expressão

$$\begin{aligned} P(v) &= \frac{\langle v, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 = \frac{5x + z}{26}(5, 0, 1, 0) + \frac{y + 7w}{50}(0, 1, 0, 7) \\ &= \left(\frac{5}{26}(5x + z), \frac{1}{50}(y + 7w), \frac{1}{26}(5x + z), \frac{7}{50}(y + 7w)\right). \end{aligned}$$

Agora, calculando o núcleo de P, para $v = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, temos que

$$P(v) = 0 \iff \begin{cases} 5x + z = 0 \\ y + 7w = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -5x \\ y = -7w \end{cases}.$$

Assim, um vetor qualquer de $\ker P$ é da forma $(x, -7w, -5x, w) = x(1, 0, -5, 0) + w(0, -7, 0, 1)$ e, portanto, $\ker P = [(1, 0, -5, 0), (0, -7, 0, 1)]$.

Observação 2: Um terceiro jeito de resolver essa questão é observar que $\ker P = U^\perp$ (por propriedade de projeção ortogonal). Como $U = [u_1, u_2]$, temos que $v = (x, y, z, w) \in U^\perp$ se, e somente se,

$$\begin{cases} 0 = \langle v, u_1\rangle = 5x + z \\ 0 = \langle v, u_2\rangle = y + 7w \end{cases}$$

Concluímos que $\ker P = U^\perp = [(1, 0, -5, 0), (0, -7, 0, 1)]$.