# MA327 Álgebra Linear - Gabarito Prova 3

Aplicada em 30/11/2023

Turma 21h-23h

---

**Questão 1.** Sejam $V$ espaço vetorial real de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T : V \to V$ um operador linear. Mostrar que:

a) [1,25 ponto] se $T$ é uma projeção ortogonal invertível, então $T = I$.

b) [1,25 ponto] se $T$ é uma projeção ortogonal antissimétrica, então $T$ é a transformação nula.

**Solução:**

**a)** Seja $T : V \to V$ projeção ortogonal invertível, temos que $T^2 = T$ e $T^{-1}$ existe. Assim,

$$T = T \circ I = T \circ (T \circ T^{-1}) = (T \circ T) \circ T^{-1} = T^2 \circ T^{-1} = T \circ T^{-1} = I$$

Logo, $T = I$.

**b)** Seja $T : V \to V$ projeção ortogonal antissimétrica, temos que $T^2 = T$ e, pela definição de operador antissimétrico, $\langle Tv, w \rangle = -\langle v, Tw \rangle$ para todo $v, w \in V$. Assim, para todo $v \in V$,

$$\langle Tv, Tv \rangle = \langle T^2 v, Tv \rangle = -\langle Tv, T^2 v \rangle = -\langle Tv, Tv \rangle.$$

Portanto, $\langle Tv, Tv \rangle = 0$ para todo $v \in V$. Logo, $Tv = 0$ para todo $v \in V$, ou seja, $T$ é a transformação nula.

**Questão 2.** [1,5 pontos] Encontre os autovalores e autovetores do operador $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido como

$$T(p(x)) = x^2 \cdot p''(x),$$

para todo polinômio $p(x)$ em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

**Solução:**

Observamos que

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 = 0 \cdot 1, \\ T(x) &= 0 = 0 \cdot x, \\ T(x^2) &= 2x^2 = 2 \cdot x^2, \\ T(x^3) &= 6x^3 = 6 \cdot x^3. \end{aligned}$$

Portanto,

- $0$ é um autovalor, com autovetores associados $1$ e $x$;
- $2$ é um autovalor, com autovetor associado $x^2$; e
- $6$ é um autovalor, com autovetor associado $x^3$.

Como cada um dos autoespaços $V_2$ e $V_6$ tem dimensão pelo menos $1$ e o autoespaço $V_0$ tem dimensão pelo menos $2$, temos que $V_0 \oplus V_2 \oplus V_6$ tem dimensão pelo menos $4$. Porém, como $\dim \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = 4$, segue que esses são todos os autovalores (e autovetores associados) do operador $T$:

$$V_0 = [1, x], V_2 = [x^2] \text{ e } V_6 = [x^3].$$

**Observação:** Um segundo jeito de resolver essa questão é considerar $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ a base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e calcular $[T]_\beta^\beta$. Das contas acima, temos que

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Como $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonal, concluímos que os autovalores de $T$ são os valores na diagonal principal, ou seja, $0$ (com multiplicidade algébrica $2$), $2$ e $6$. Além disso, obtemos que os autovetores são $1$ e $x$ associados ao autovalor $0$, $x^2$ associado ao autovalor $2$ e $x^3$ associado ao autovalor $6$.

Como a dimensão do autoespaço associado a um autovalor $\lambda$ (multiplicidade geométrica) é menor ou igual à multiplicidade algébrica de $\lambda$, obtemos que $\dim V_0 \leq 2$ e $\dim V_2 = \dim V_6 = 1$. Portanto, $V_0 = [1, x]$, $V_2 = [x^2]$ e $V_6 = [x^3]$. Assim, concluímos que todos os autovetores foram encontrados.

**Questão 3.** Considere a seguinte matriz real:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) [1 ponto] Mostre que os autovalores de $A$ são $0$ e $6$.

b) [1,5 ponto] Para cada autovalor de $A$, determine os autoespaços correspondentes.

c) [1,5 pontos] A matriz $A$ é diagonalizável? Em caso afirmativo, dê uma matriz ortogonal $Q$ de forma que $Q^t AQ$ seja diagonal.

**Solução:**

**a)** Calculamos o polinômio característico de $A$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (5-\lambda)^2(2-\lambda) + (-4) + (-4) - (2-\lambda) - 4(5-\lambda) - 4(5-\lambda) \\ &= (\lambda^2 - 10\lambda + 25)(2-\lambda) - 50 + 9\lambda = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda = -\lambda(\lambda-6)^2. \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores de $A$ são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 6$.

**b)** Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 0$, precisamos estudar $\ker(A)$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 5x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 2y - 2z &= 0 \\ x - 2y + 5z &= 0 \end{cases}.$$

Somando a terceira equação as duas primeiras, obtemos $z = -x$. Substituindo esse resultado na terceira equação, obtemos $y = -2x$. Portanto, os autovetores associados a $\lambda_1 = -3$ são da forma $\begin{pmatrix} x \\ -2x \\ -x \end{pmatrix}$ para $x \in \mathbb{R}$ não nulo. Nomeando

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

o autoespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$ é $V_0 = [X_1]$.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 6$, precisamos estudar $\ker(A - 6I)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow -x + 2y + z = 0.$$

Portanto, os autovetores associados a $\lambda_2 = 6$ são da forma

$$\begin{pmatrix} 2y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para $y, z \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos. Nomeando

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o autoespaço associado ao autovalor $\lambda_2 = 6$ é $V_6 = [X_2, X_3]$.

**c)** A matriz $A$ é diagonalizável, pois possui três autovetores linearmente independente. De fato, como $A$ é uma matriz simétrica, poderíamos afirmar que $A$ é (ortogonalmente) diagonalizável no início.

Para encontrar $Q$ ortogonal como no enunciado, precisamos de um conjunto ortonormal de autovetores de $A$. Primeiro, vamos nos preocupar em encontrar um conjunto ortogonal de autovetores.

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com produto interno usual e a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_\beta^\beta = A$, onde $\beta$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Os autovetores de $T$ são $v_1 = (1, -2, -1)$ (associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$) e $v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (2, 1, 0)$ (associados ao autovalor $\lambda_2 = 6$)

Como $A$ é uma matriz simétrica (consequentemente $T$ é um operador simétrico), autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. Assim, podemos aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schimidt separadamente em cada autoespaço. Vamos aplicar o processo no conjunto $\{v_2, v_3\}$ (autovetores associados a $\lambda_2 = 6$):

$$\begin{aligned} q_1 &= v_2 = (1, 0, 1) \\ q_2 &= v_3 - \frac{\langle v_3, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 = (2, 1, 0) - \frac{\langle (2,1,0), (1,0,1) \rangle}{\langle (1,0,1), (1,0,1) \rangle} (1, 0, 1) = (2, 1, 0) - (1, 0, 1) = (1, 1, -1). \end{aligned}$$

Normalizando, temos os autovetores $u_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ e $u_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$. Além disso, normalizando $v_1$, obtemos $u_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right)$.

Seja $\gamma = \{u_1, u_2, u_3\}$, observamos que $\gamma$ é uma base ortonormal de autovetores de $T$ e

$$[T]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tome

$$Q = [I]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

ou seja, $Q$ é a matriz formada ao colocar os autovetores em colunas. Como as colunas de $Q$ formam uma base ortonormal, temos que $Q$ é uma matriz ortogonal e, portanto, $Q^{-1} = Q^t$.

Assim,

$$Q^t A Q = [I]_\gamma^\beta [T]_\beta^\beta [I]_\beta^\gamma = [T]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Em particular, $Q^t A Q$ é diagonal.

**Questão 4.**

1. [1 ponto] Mostrar que se $\lambda$ é um autovalor de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ então, para todo $k \in \mathbb{N}$, o valor $\lambda^k$ é autovalor de $A^k$.

2. [1 pontos] Dê um exemplo de matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ de forma que $\lambda^2$ seja autovalor de $A^2$, mas que $\lambda$ **não** seja autovalor de $A$.

**Solução:**

**1.** Seja $\lambda$ um autovalor de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com autovetor associado $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, ou seja, $AX = \lambda X$. Para $k \in \mathbb{N}$, temos

$$A^k X = A^{k-1}(AX) = A^{k-1}(\lambda X) = \lambda(A^{k-1}X).$$

Repetindo esse processo $k$-vezes, obtemos $A^k X = \lambda^k X$. Logo, $\lambda^k$ é autovalor de $A^k$, com autovetor associado $X$.

**2.** Considere $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Temos que o escalar $\lambda = 1$ não é autovalor de $A$ (o único autovalor de $A$ é $-1$), enquanto $\lambda^2 = 1$ é autovalor de $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.