MA327: Álgebra Linear - Gabarito Prova 2

Aplicada em 07/11/2023

Turma 8-10h

Questão 1 Sejam $\mathcal{B}_1 = \{(0,2),(2,-1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,0,-1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente, e seja $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que verifica

$$[S]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. [0,5 pontos] Encontre as coordenadas do vetor $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ na base $\mathcal{B}_1$, isto é $[v]_{\mathcal{B}_1}$.
2. [1 pontos] Escreva a expressão de $S(x,y)$ na base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$, isto é, $[S(x,y)]_{\mathcal{C}}$.
3. [1 pontos] Verifique se é possível encontrar $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $Su = (1,0,1)$.

Solução:

1. Queremos encontrar, primeiramente, a matriz $[I]_{\mathcal{B}_1}^{\beta}$ de mudança de base de $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ para $\mathcal{B}_1 = \{(0,2),(2,-1)\}$. Observemos que

$$(1,0) = \frac{1}{4}(0,2) + \frac{1}{2}(2,-1)$$
$$(0,1) = \frac{1}{2}(0,2) + 0(2,-1)$$

   Logo,

$$[I]_{\mathcal{B}_1}^{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

   Portanto,

$$[v]_{\mathcal{B}_1} = [I]_{\mathcal{B}_1}^{\beta}[v]_{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+2y}{4} \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

2. Podemos obter $[S(x,y)]_{\mathcal{C}}$ a partir de:

$$[S(x,y)]_{\mathcal{C}} = [I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_2}[S]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}[v]_{\mathcal{B}_1}$$

   onde $[I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_2}$ é dado por

$$[I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$[S(x,y)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x+2y}{4} \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3x+2y}{2} \\ \frac{x+2y}{2} \\ 3x+2y \end{pmatrix}$$

3. Se $u = (x,y)$ é tal que $Su = (1,0,1)$, então, pelo exercício anterior, temos que

$$\frac{-3x+2y}{2} = 1 \tag{1}$$
$$\frac{x+2y}{2} = 0 \tag{2}$$
$$3x+2y = 1 \tag{3}$$

De (1) e (2) temos que $x = -\frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{4}$, mas isso não satisfaz (3), pois $3(-\frac{1}{2}) + 2\frac{1}{4} = -1$. Logo, não existe tal u.

Questão 2 Considere a função $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T(x, y, z) = (z, x-y, -z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. [1 ponto] Verifique que T é linear.

2. [1,5 ponto] Determine se T é um isomorfismo. Justifique.

Solução:

1. Verifiquemos que, seja $v_1 = (a_1, b_1, c_1), v_2 = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$

$$T(v_1 + \lambda v_2) = T(a_1 + \lambda a_2, b_1 + \lambda b_2, c_1 + \lambda c_2) = (c_1 + \lambda c_2, a_1 + \lambda a_2 - (b_1 + \lambda b_2), -(c_1 + \lambda c_2))$$

$$= (c_1, a_1 - b_1, -c_1) + (\lambda c_2, \lambda a_2 - \lambda b_2, -\lambda c_2) = T(v_1) + \lambda T(v_2)$$

   Portanto, T é linear.

2. Para isso, devemos verificar se T é injetora e sobrejetora. Lembremos que uma transformação linear é injetora se, e somente se, seu núcleo é composto somente pelo vetor nulo. Veja que, seja $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$T(v) = 0 \Leftrightarrow (z, x - y, -z) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow z = 0, x - y = 0, -z = 0$$

$$\Rightarrow v = (x, x, 0)$$

   Portanto, T não é injetora e, consequentemente, não é isomorfismo.

Questão 3 Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x - y + z = 0\}.$$

1. [1 ponto] Dê uma base para S (mostre que o conjunto proposto é base de fato).

2. [1,5 pontos] Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno dado por

$$\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = 2xx' + 3yy' + zz'.$$

   Encontre uma base ortonormal de S **com respeito a este produto interno dado**.

Solução:

1. Perceba que, $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ pertencem a S.

   Agora, seja $(x, y, z) \in S$, se $x - y + z = 0$, então $x + z = y$. Logo,

$$(x, y, z) = (x, x + z, z) = (x, x, 0) + (0, z, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 1, 1)$$

   Portanto, o conjunto $\beta = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ gera o subespaço S. Como $(1, 1, 0) \neq a(0, 1, 1) \, \forall a \in \mathbb{R}$, β é linearmente independente, e, portanto, é base.

2. Pelo processo de Gram-Schimidt, tomamos $q_1 = (1, 1, 0)$ e

$$q_2 = (0, 1, 1) - \frac{\langle (0, 1, 1), (1, 1, 0) \rangle}{\langle (1, 1, 0), (1, 1, 0) \rangle}(1, 1, 0)$$

$$= (0, 1, 1) - \frac{2.0.1 + 3.1.1 + 1.0}{2.1.1 + 3.1.1 + 0.0}(1, 1, 0) = (0, 1, 1) - \frac{3}{5}(1, 1, 0) = (-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 1)$$

   Agora, tome

$$q_1^* = \frac{q_1}{\sqrt{\langle q_1, q_1 \rangle}} = (\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0)$$

$$q_2^* = \frac{q_2}{\sqrt{\langle q_2, q_2 \rangle}} = (-\frac{3\sqrt{55}}{55}, \frac{2\sqrt{55}}{55}, \frac{\sqrt{55}}{11})$$

   Assim, $\beta^* = \{q_1^*, q_2^*\}$ é base ortonormal de S.

Questão 4 Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique adequadamente.

1. [1,25 pontos] Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que

$$\ker(T) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 5z \text{ e } w = 7y\}.$$

   Então T é sobrejetora.

2. [1,25 pontos] Existe uma transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ cujo núcleo é gerado pelos polinômios $1 + x$, $1 - x^2$.

Solução:

1. A afirmação é verdadeira. Veja que se $(x, y, z, w) \in ker(T)$, então $(x, y, z, w) = (5z, y, z, 7y) = z(5, 0, 1, 0) + y(0, 1, 0, 7)$. Como $ker(T)$ é gerado por 2 vetores l.i., $dim(ker(T)) = 2$.

   Agora, pelo Teorema do Núcleo e Imagem, temos que

$$dim(\mathbb{R}^4) = dim(Im(T)) + dim(ker(T))$$

$$\Rightarrow 4 = dim(Im(T)) + 2 \Rightarrow dim(Im(T)) = 2$$

   Logo, $Im(T) = \mathbb{R}^2$.

2. A afirmação é verdadeira. Tome a transformação $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $T(a + bx + cx^2) = a - b + c$. Veja que

$$T(a + bx + cx^2) = 0 \Leftrightarrow a - b + c = 0 \Leftrightarrow a = b - c$$

   Logo, se $p = a + bx + cx^2 \in ker(T)$, então $p = (b - c) + bx + cx^2 = b(1 + x) - c(1 - x^2)$, ou seja, $ker(T)$ é gerado pelos polinômios $1 + x$, $1 - x^2$.