MA327: Álgebra Linear - Gabarito Prova 2

Aplicada em 07/11/2023

Turma 19-21h

Questão 1 Sejam $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,0,-1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(0,2),(2,-1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$respectivamente, e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que verifica

$$[S]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. [1 ponto] Encontre as coordenadas do vetor $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ na base $\mathcal{B}_1$, isto é, $[v]_{\mathcal{B}_1}$.
2. [1 ponto] Escreva a expressão de $S(x,y,z)$ na base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$, isto é, $[S(x,y,z)]_{\mathcal{C}}$.
3. [1 ponto] Verifique se é possível encontrar $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $Su = (1,-1)$.

Solução:

1. Queremos encontrar, primeiramente, a matriz $[I]^{\beta}_{\mathcal{B}_1}$ de mudança de base de $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ para $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,0,-1)\}$. Observemos que

$$\begin{aligned}
(1,0,0) &= 0(1,1,0) + 1(0,0,1) + 1(1,0,-1) \\
(0,1,0) &= 1(1,1,0) - 1(0,0,1) - 1(1,0,-1) \\
(0,0,1) &= 0(1,1,0) + 1(0,0,1) + 0(1,0,-1)
\end{aligned}$$

   Logo,

$$[I]^{\beta}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Portanto,

$$[v]_{\mathcal{B}_1} = [I]^{\beta}_{\mathcal{B}_1}[v]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x-y+z \\ x-y \end{pmatrix}$$

2. Podemos obter $[S(x,y,z)]_{\mathcal{C}}$ a partir de:

$$[S(x,y)]_{\mathcal{C}} = [I]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{C}}[S]^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}[v]_{\mathcal{B}_1}$$

   onde $[I]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{C}}$ é dado por

$$[I]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$[S(x,y,z)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x-y+z \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8x+8y \\ 12x-8y+8z \end{pmatrix}$$

3. Se $u = (x, y, z)$ é tal que $Su = (1, -1)$, então, pelo exercício anterior, temos que

$$-8x + 8y = 1 \tag{1}$$

$$12x - 8y + 8z = -1 \tag{2}$$

De (1) e (2) temos que $z = -\frac{x}{2}$ e $y = x + \frac{1}{8}$. Logo, $u = (1, \frac{9}{8}, -\frac{1}{2})$ é tal $Su = (1, -1)$.

Questão 2 Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear definida por:

$$T(x, y, z, t) = (x - y - z, -x + y + 2z, x - y, z - t).$$

1. [1,25 pontos] Determinar uma base de $\mathrm{Im}T$.

2. [1,25 pontos] Decidir se T é um isomorfismo. Justifique.

Solução:

1. Veja que, seja $v \in \mathbb{R}^4$, pode ser escrito como

   $$v = (x-y-z, -x+y+2z, x-y, z-t) = (x, -x, x, 0)+(-y, y, -y, 0)+(-z, 2z, 0, z)+(0, 0, 0, -t)$$

   $$= x(1, -1, 1, 0) + y(-1, 1, -1, 0) + z(-1, 2, 0, 1) + t(0, 0, 0, -1)$$

   Agora, perceba que $(1, -1, 1, 0) = -1(-1, 1, -1, 0)$ e se

   $$y(-1, 1, -1, 0) + z(-1, 2, 0, 1) + t(0, 0, 0, -1) = (0, 0, 0, 0)$$
   $$\Leftrightarrow$$
   $$-y - z = 0$$
   $$y + 2z = 0$$
   $$-y = 0$$
   $$-t = 0$$

   $$\Leftrightarrow y = 0, z = 0, t = 0$$

   Portanto, $\beta = \{(-1, 1, -1, 0), (-1, 2, 0, 1), (0, 0, 0, -1)\}$ é base de $Im(T)$.

2. Para isso, devemos verificar se T é injetora e sobrejetora. Lembremos que uma transformação linear é injetora se, e somente se, seu núcleo é composto somente pelo vetor nulo. Mas, pelo Teorema do Núcleo e Imagem

   $$dim(\mathbb{R}^4) = dim(Im(T)) + dim(ker(T))$$

   $$\Rightarrow 4 = 3 + dim(ker(T)) \Rightarrow dim(ker(T)) = 1$$

   Portanto, T não é injetora e, consequentemente, não é isomorfismo.

Questão 3

1. [1,5 pontos] Considerando-se a norma $\|\cdot\|$ induzida pelo produto interno usual do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, determine $a \in \mathbb{R}$ para que $\|(6, a, -1)\| = \sqrt{51}$.

2. [1,5 pontos] Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Aplique o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ a partir do conjunto

$$S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}.$$

Solução:

1. Queremos $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|(6, a, -1)\| = \sqrt{6^2 + a^2 + (-1)^2} = \sqrt{37 + a^2} = \sqrt{51}$$

$$\Rightarrow 37 + a^2 = 51 \Rightarrow a^2 = 14 \Rightarrow a = \sqrt{14}$$

2. Pelo processo de Gram-Schimidt, tomamos $q_1 = (1, 2, 3)$ e

$$q_2 = (0, 1, 1) - \frac{\langle (0, 1, 1), (1, 2, 3) \rangle}{\langle (1, 2, 3), (1, 2, 3) \rangle}(1, 2, 3)$$

$$= (0, 1, 1) - \frac{0.1 + 1.2 + 3.1}{1.1 + 2.2 + 3.3}(1, 1, 0) = (0, 1, 1) - \frac{5}{14}(1, 1, 0) = (-\frac{5}{14}, \frac{9}{14}, 1)$$

$$q_3 = (1, 0, 0) - \frac{\langle (1, 0, 0), (1, 2, 3) \rangle}{\langle (1, 2, 3), (1, 2, 3) \rangle}(1, 2, 3) - \frac{\left\langle (1, 0, 0), (-\frac{5}{14}, \frac{9}{14}, 1) \right\rangle}{\left\langle (-\frac{5}{14}, \frac{9}{14}, 1), (-\frac{5}{14}, \frac{9}{14}, 1) \right\rangle}(-\frac{5}{14}, \frac{9}{14}, 1)$$

$$= (1, 0, 0) - (\frac{1}{14}, \frac{1}{7}, \frac{3}{14}) - (\frac{25}{302}, \frac{45}{302}, \frac{-35}{151}) = (\frac{894}{1057}, -\frac{617}{2114}, -\frac{943}{2114})$$

Assim, $\beta = \{q_1, q_2, q_3\}$ é base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Questão 4 [1,5 pontos] Considere o subespaço vetorial U de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido como

$$U = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \,:\, a_3 = -a_0\}.$$

Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ que verifique simultaneamente as duas propriedades seguintes:

$$U = \mathrm{Im}T, \qquad (1,1,0,0) \notin \ker T.$$

Solução:

Tome a transformação $T : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que $T(a_0, a_1, a_2, a_3) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 - a_0 t^3$. Veja que, seja $v_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4), v_2 = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}
T(v_1 + \lambda v_2) &= T((a_1 + \lambda b_1, a_2 + \lambda b_2, a_3 + \lambda b_3, a_4 + \lambda b_4)) \\
&= (a_1 + \lambda b_1) + (a_2 + \lambda b_2)t + (a_3 + \lambda b_3)t^2 - (a_1 + \lambda b_1)t^4 \\
&= (a_1 + a_2 t + a_3 t^2 - a_1 t^3) + \lambda(b_1 + b_2 t + b_3 t^2 - b_1 t^3) \\
&= T(v_1) + \lambda T(v_2)
\end{aligned}$$

Logo, T definida dessa forma é linear. Além disso, tome $p(t) = a0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 - a_0 t^3 \in U$ e $v = (a_0, a_1, a_2, 0) \in \mathbb{R}^4$, então

$$T(v) = T(a_0, a_1, a_2, 0) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 - a_0 t^3 = p(t) \in \mathrm{Im}T$$

ou seja, $U \subseteq \mathrm{Im}T$. Agora, como $\forall p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathrm{Im}T$ temos que $a_0 = -a_3$, então $\mathrm{Im}T \subseteq U$. Portanto, $U = \mathrm{Im}T$. Por fim, veja que

$$T(1,1,0,0) = 1 + t - t^3 \neq 0 \Rightarrow (1,1,0,0) \notin \ker T$$