MA327: Álgebra Linear - Gabarito Prova 1

Aplicada em 05/09/2023

Turma 19h-21h

Questão 1 Seja $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes reais 2×2 e considere os seguintes subconjuntos:

$$U = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A + A^t = 0\}, \quad W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A^2 = I\}.$$

1. [1 ponto] Mostrar que U é subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. [1 ponto] Mostrar que W **não é** subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

SOLUÇÃO:

1. Vamos verificar que U é não vazio, que U é fechado pela soma e fechado pela multiplicação por escalar.

Temos que U é não vazio, pois $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$. Sejam $A, B \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $A + A^t = 0$ e $B + B^t = 0$. Assim,

$$(A + B) + (A + B)^t = A + B + A^t + B^t = (A + A^t) + (B + B^t) = 0 + 0 = 0$$

e

$$(\lambda A) + (\lambda A)^t = \lambda A + \lambda A^t == \lambda(A + A^t) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Portanto, $A + B \in U$ e $\lambda A \in U$.

Logo, U é subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. Para mostrar que W não é subespaço, basta mostrar que uma das propriedades de espaço vetorial falha. Vamos mostrar que W não é fechado pela soma.

É claro que $I \in W$, pois $I^2 = I$. Porém,

$$(I + I)^2 = (2I)^2 = 4I^2 = 4I \neq I,$$

ou seja, $I + I \notin W$. Logo, W não é subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Questão 2 Em $\mathbb{R}^4$ considere os subespaços

$$U = [\{(1,2,0,1),(1,0,3,3)\}], \qquad W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : w = 0, y = -2z\}.$$

1. [1,5 pontos] Encontre uma base para W e determine a sua dimensão.
2. [1,5 pontos] Encontre uma base para $U \cap W$ e uma base para $U + W$.

SOLUÇÃO:

1. Primeiro vamos encontrar um conjunto gerador de W. Um vetor qualquer de W é da forma:

$$(x, -2z, z, 0) = x(1,0,0,0) + z(0,-2,1,0).$$

Portanto, $S = \{(1,0,0,0),(0,-2,1,0)\}$ é um conjunto gerador de W. Além disso, como S tem apenas dois vetores e um não é múltiplo do outro, segue que S é linearmente independente.

Logo, $S = \{(1,0,0,0),(0,-2,1,0)\}$ é uma base para W e, consequentemente, $\dim(W) = 2$.

2. Inicialmente nomeamos

$$u_1 = (1,2,0,1), u_2 = (1,0,3,3), w_1 = (1,0,0,0) \text{ e } w_2 = (0,-2,1,0).$$

Precisamos encontrar uma base para $U \cap W$, vamos encontrar um conjunto gerador primeiro.

Sabemos que um vetor de $U \cap W$ deve ser escrito simultaneamente como combinação linear dos vetores geradores de U e dos vetores geradores de W.

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 = cw_1 + dw_2 \quad &\iff \quad a(1,2,0,1) + b(1,0,3,3) = c(1,0,0,0) + d(0,-2,1,0) \\ &\iff \quad (a+b, 2a, 3b, a+3b) = (c, -2d, d, 0). \end{aligned}$$

De onde obtemos o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{cccc} a & +b & = & c \\ 2a & & = & -2d \\ & 3b & = & d \\ a & +3b & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} a & +b & -c & = & 0 \\ a & & & = & -d \\ & b & & = & \frac{1}{3}d \\ a & +3b & & = & 0 \end{array}\right.,$$

cuja solução é $a = -d, b = \frac{1}{3}d, c = -\frac{2}{3}d$, sendo $d \in \mathbb{R}$ variável livre.

Utilizando a, b na combinação linear de vetores de U: $au_1 + bu_2$, obtemos que um vetor de $U \cap W$ é escrito como

$$(-d)u_1 + (\tfrac{1}{3}d)u_2 = -d(1,2,0,1) + \tfrac{1}{3}d(1,0,3,3) = (-\tfrac{2}{3}d, -2d, d, 0) = d(-\tfrac{2}{3}, -2, 1, 0).$$

Portanto, $\{(-\frac{2}{3}, -2, 1, 0)\}$ gera $U \cap W$ e, consequentemente, é uma base para $U \cap W$, pois todo conjunto com apenas um vetor não nulo é linearmente independente.

Precisamos agora encontrar uma base para $U+W$. Sabemos que $U+W$ é gerado por $\{u_1, u_2, w_1, w_2\}$. Pela conta feita anteriormente,

$$au_1 + bu_2 = cw_1 + dw_2 \iff a = -d, b = \frac{1}{3}d, c = -\frac{2}{3}d.$$

Tomando $d = 1$, obtemos $w_2 = -u_1 + \frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{3}w_1$ e, portanto, $U+W = [\{u_1, u_2, w_1, w_2\}] = [\{u_1, u_2, w_1\}]$. Vamos verificar se $\{u_1, u_2, w_1\}$ é linearmente independente.

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $au_1 + bu_2 + cw_1 = 0$. Temos que

$$0 = au_1 + bu_2 + cw_1 = a(1, 2, 0, 1) + b(1, 0, 3, 3) + c(1, 0, 0, 0).$$

De onde obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} a & +b & +c & = 0 \\ 2a & & & = 0 \\ & 3b & & = 0 \\ a & +3b & & = 0 \end{cases},$$

cuja única solução é $a = b = c = 0$. Portanto, $\{u_1, u_2, w_1\}$ é linearmente independente.

Segue que $\{u_1, u_2, w_1\} = \{(1, 2, 0, 1), (1, 0, 3, 3), (1, 0, 0, 0)\}$ é uma base para $U + W$.

Observação: Uma outra maneira para obter uma base para $U + W$ seria escalonar a matriz formada colocando os vetores geradores nas linhas. Como $U + W = [\{u_1, u_2, w_1, w_2\}]$, escalonamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{2}{3}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como a última linha está associada ao vetor w_2 e nela aparece apenas zeros, concluímos que w_2 é escrito como combinação linear dos demais vetores e, além disso, o conjunto $\{u_1, u_2, w_1\}$ é linearmente independente. Logo, $\{u_1, u_2, w_1\} = \{(1, 2, 0, 1), (1, 0, 3, 3), (1, 0, 0, 0)\}$ é uma base para $U + W$. Do processo de escalonamento, também temos que $\{(1, 2, 0, 1), (0, -2, 3, 2), (0, 0, -3, -3)\}$ forma uma base para $U + W$, já que eles são uma combinação linear dos vetores u_1, u_2, w_1.

Questão 3 Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ de polinômios a coeficientes reais de grau menor ou igual a 3, e considere o conjunto

$$S = \{1 + t, t + t^2, t^2 + t^3, t^3 + 1\}.$$

1. [1,5 ponto] Encontre uma base para o subespaço gerado por S e calcule sua dimensão.

2. [1 ponto] Complete a base encontrada no item anterior a uma base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

3. [1 ponto] Sejam $U = [\{1 + t, t + t^2\}]$ e $W = [\{t^2 + t^3, t^3 + 1\}]$. Verifique que $\dim U = \dim W = 2$. Calcule $\dim(U \cap W)$ sem encontrar explícitamente o subespaço $U \cap W$; justifique.

SOLUÇÃO:

1. Vamos nomear

$$p_1(t) = 1 + t, p_2(t) = t + t^2, p_3(t) = t^2 + t^3 \text{ e } p_4(t) = t^3 + 1.$$

Note que $p_4 = p_3 - p_2 + p_1$ e, portanto, $[S] = [\{p_1, p_2, p_3, p_4\}] = [\{p_1, p_2, p_3\}]$. Vamos verificar se $S' = \{p_1, p_2, p_3\}$ é linearmente independente. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $ap_1 + bp_2 + cp_3 = 0$. Como

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 = a(1 + t) + b(t + t^2) + c(t^2 + t^3),$$

temos o sistema

$$\begin{cases} a & & & = 0 \\ a & +b & & = 0 \\ & b & +c & = 0 \\ & & c & = 0 \end{cases},$$

cuja única solução é $a = b = c = 0$. Logo, S' é linearmente independente.

Como $[S'] = [S]$ e S' é linearmente independente, segue que $S' = \{p_1, p_2, p_3\} = \{1+t, t+t^2, t^2+t^3\}$ é uma base para o subespaço gerado por S e, consequentemente, $\dim([S]) = 3$.

2. Considere o conjunto $S' \cup \{1, t, t^2, t^3\} = \{1 + t, t + t^2, t^2 + t^3, 1, t, t^2, t^3\}$. Como tal conjunto contém todos os vetores da base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, temos que ele é um conjunto gerador de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Porém ele não é linearmente independente, pois possui mais vetores que $\dim(\mathcal{P}_3(\mathbb{R})) = 4$. Vamos encontrar quais podem ser escritos como combinação linear dos demais.

Podemos escrever

$$t = (1 + t) + (-1) \cdot 1. \tag{1}$$

Utilizando a expressão de t acima, obtemos

$$t^2 = (t + t^2) - t \overset{(1)}{=} (t + t^2) - (1 + t) + 1, \tag{2}$$

Por fim, utilizando a expressão de t^2 acima

$$t^3 = (t^2 + t^3) - t^2 \overset{(2)}{=} (t^2 + t^3) - (t + t^2) + (1 + t) + (-1) \cdot 1,$$

ou seja, temos que t, t^2 e t^3 podem ser escritos como combinação linear dos demais.

Logo, $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = [\{1+t, t+t^2, t^2+t^3, 1, t, t^2, t^3\}] = [\{1+t, t+t^2, t^2+t^3, 1\}]$.

Como agora temos um conjunto de quatro vetores gerando $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, tal conjunto também deve ser linearmente independente, vamos verificar. Sejam, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $a(1+t) + b(t+t^2) + c(t^2+t^3) + d \cdot 1 = 0$, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} a & & & +d & = 0 \\ a & +b & & & = 0 \\ & b & +c & & = 0 \\ & & c & & = 0, \end{cases}$$

cuja única solução é $a = b = c = d = 0$. Segue que $\{1+t, t+t^2, t^2+t^3, 1\}$ é um conjunto linearmente independente.

Logo, $\{1+t, t+t^2, t^2+t^3, 1\}$ é uma base para $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ que contém $S' = \{1+t, t+t^2, t^2+t^3\}$ (base para o subespaço vetorial gerado por S encontrada no item anterior).

Observação: Todo conjunto gerador de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ com 4 vetores é linearmente independente e, portanto, é uma base para $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ (note que $\dim(\mathcal{P}_3(\mathbb{R})) = 4$). De fato, caso contrário, poderíamos remover os elementos que são combinação linear dos demais, obtemos uma base para $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ com menos de 4 vetores, o que não é possível.

3. Vamos verificar que $\{p_1, p_2\} = \{1+t, t+t^2\}$ é uma base para U. Sejam $A, B \in \mathbb{R}$ tais que $Ap_1 + Bp_2 = 0$. Temos que

$$0 = A(1+t) + B(t+t^2) = A + (A+B)t + Bt^2$$

e, portanto, $A = B = 0$. Segue que $\{p_1, p_2\} = \{1+t, t+t^2\}$ é uma base para $[\{p_1, p_2\}] = U$ e, consequentemente, $\dim(U) = 2$.

Analogamente, podemos verificar que $\{p_3, p_4\} = \{t^2+t^3, t^3+1\}$ é uma base para W. Sejam $C, D \in \mathbb{R}$ tais que $Cp_3 + Dp_4 = 0$. Temos que

$$0 = C(t^2+t^3) + D(t^3+1) = D + Ct^2 + (C+D)t^3$$

e, portanto, $C = D = 0$. Segue que $\{p_3, p_4\} = \{t^2+t^3, t^3+1\}$ é uma base para $[\{p_3, p_4\}] = W$ e, consequentemente, $\dim(W) = 2$.

Para calcular a dimensão de $U \cap W$, observamos que $U + W = [S]$ e, portanto, $\dim(U+W) = \dim([S]) = 3$ (pelo primeiro item dessa questão). Logo, por um resultado estudado (Teorema 3.6.5 do livro-texto), concluímos que

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U+W) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Questão 4 Considere duas bases $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\gamma = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, tais que

$$[I]_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. [1 ponto] Considere o vetor $v \in \mathbb{R}^3$ que tem por coordenadas na base β a seguinte tripla:

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   Determine as coordenadas de v na base γ, isto é, calcule $[v]_\gamma$.

2. [1 ponto] Sabendo que $[I]_\gamma^\beta$ é como acima, encontre entre as opções abaixo listadas, as relações corretas entre os vetores das bases β e γ:

$$(i)\begin{cases} u_1 &= w_1 - w_2 - w_3 \\ u_2 &= 2w_2 + 3w_3 \\ u_3 &= 3w_1 + w_3 \end{cases} \qquad (ii)\begin{cases} u_1 &= w_1 - 3w_3 \\ u_2 &= -w_1 + 2w_2 \\ u_3 &= -w_1 + 3w_2 + w_3 \end{cases} \qquad (iii)\begin{cases} w_1 &= u_1 - u_2 - u_3 \\ w_2 &= 2u_2 + 3u_3 \\ w_3 &= 3u_1 + u_3 \end{cases}$$

$$(iv)\begin{cases} w_1 &= u_1 - 3u_3 \\ w_2 &= -u_1 + 2u_2 \\ w_3 &= -u_1 + 3u_2 + u_3 \end{cases} \qquad (v)\ \text{nenhuma das anteriores}$$

SOLUÇÃO:

1. Utilizando a matriz de mudança de base $[I]_\gamma^\beta$, temos

$$[v]_\gamma = [I]_\gamma^\beta [v]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. As relações entre os vetores das bases de β e γ estão descritas corretamente em (i). Pela construção da matriz de mudança de base $[I]_\gamma^\beta$, sabemos que as coordenadas de u_i na base $\gamma = \{w_1, w_2, w_3\}$ estão descritas na i-ésima coluna de $[I]_\gamma^\beta$. Portanto,

$$[u_1]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, [u_2]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, [u_3]_\gamma = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} u_1 &= w_1 - w_2 - w_3 \\ u_2 &= 2w_2 + 3w_3 \\ u_3 &= 3w_1 + w_3. \end{cases}$$

Além disso, vamos calcular como seria a relação dos vetores da base γ como combinação linear dos vetores da base β. Da teoria sabemos que $[I]_\beta^\gamma = ([I]_\gamma^\beta)^{-1}$, vamos calcular a inversa de $[I]_\gamma^\beta$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow -2L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -9 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

Portanto,

$$[I]_\beta^\gamma = ([I]_\gamma^\beta)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Logo, olhando para as colunas,

$$[w_1]_\beta = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, [w_2]_\beta = \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, [w_3]_\beta = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} w_1 &= -2u_1 - u_2 + u_3 \\ w_2 &= -9u_1 - 4u_2 + 3u_3 \\ w_3 &= 6u_1 + 3u_2 - 2u_3. \end{cases}$$

o que não corresponde à nenhum dos sistemas listados.