MA327 Álgebra Linear - Gabarito Prova 1

Aplicada em 05/09/2023

Turmas 8h-10h

Questão 1 Seja $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes reais 2×2 e considere os seguintes subconjuntos:

$$U = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \text{traço } A = 0\}, \quad W = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A^2 = A\}.$$

Lembrar que se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, então o traço de A é o valor $a + d$.

1. [1 ponto] Mostrar que U é subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. [1 ponto] Mostrar que W **não é** subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

SOLUÇÃO:

1. Vamos verificar que U é não vazio, que U é fechado pela soma e fechado pela multiplicação por escalar.

Temos que U é não vazio, pois $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$. Sejam $A, B \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que traço $A = 0$ e traço $B = 0$. Assim,

$$\text{traço } (A + B) = \text{traço } A + \text{traço } B = 0 + 0 = 0$$

e

$$\text{traço } (\lambda A) = \lambda \text{traço } A = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Portanto, $A + B \in U$ e $\lambda A \in U$.

Logo, U é subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. Para mostrar que W não é subespaço, basta mostrar que uma das propriedades de espaço vetorial falha. Vamos mostrar que W não é fechado pela soma.

É claro que $I \in W$, pois $I^2 = I$. Porém,

$$(I + I)^2 = (2I)^2 = 4I^2 = 4I \neq I + I,$$

ou seja, $I + I \notin W$. Logo, W não é subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Questão 2 Considere $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, 3, 3)$, $v_3 = (0, 2, -1, 0)$ e $v_4 = (1, 0, 0, 0)$ em $\mathbb{R}^4$. Seja $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

1. [1 ponto] Encontre uma base para o subespaço gerado por S e calcule sua dimensão.

2. [1 ponto] Complete a base encontrada no item anterior a uma base de $\mathbb{R}^4$.

3. [1 ponto] Sejam $U = [\{v_1, v_2\}]$ e $W = [\{v_3, v_4\}]$. Verifique que $\dim U = \dim W = 2$. Calcule $\dim(U \cap W)$ sem encontrar explícitamente o subespaço $U \cap W$; justifique.

SOLUÇÃO:

Daremos duas soluções para os itens 1. e 2.

1.

Solução 1: Vamos verificar se S é linearmente independente ou se algum vetor é combinação linear dos demais.

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = 0$. Como

$$\begin{aligned} av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 &= a(1, 2, 0, 1) + b(1, 0, 3, 3) + c(0, 2, -1, 0) + d(1, 0, 0, 0) \\ &= (a + b + d, 2a + 2c, 3b - c, a + 3b), \end{aligned}$$

obtemos o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{llllr} a & +b & & +d & = 0 \\ 2a & & +2c & & = 0 \\ & 3b & -c & & = 0 \\ a & +3b & & & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{llll} a & +b & +d & = 0 \\ a & & & = -c \\ & b & & = \frac{1}{3}c \\ a & +3b & & = 0 \end{array}\right. ,$$

cuja solução é $a = -c, b = \frac{1}{3}c, d = \frac{2}{3}c$, sendo $c \in \mathbb{R}$ variável livre. Como as constantes a, b, c, d não são necessariamente todas nulas, temos que S não é linearmente independente. Tomando $c = 1$, temos que $-v_1 + \frac{1}{3}v_2 + v_3 + \frac{2}{3}v_4 = 0$ e, portanto,

$$v_3 = v_1 - \frac{1}{3}v_2 - \frac{2}{3}v_4.$$

Assim, $[S] = [\{v_1, v_2, v_3, v_4\}] = [\{v_1, v_2, v_4\}]$.

Precisamos verificar se $S' = \{v_1, v_2, v_4\}$ é linearmente independente. Sejam $A, B, C \in \mathbb{R}$ tais que $Av_1 + Bv_2 + Cv_4 = 0$. Como

$$Av_1 + Bv_2 + Cv_4 = A(1, 2, 0, 1) + B(1, 0, 3, 3) + C(1, 0, 0, 0) = (A + B + C, 2A, 3B, A + 3B),$$

obtemos o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{llll} A & +B & +C & = 0 \\ 2A & & & = 0 \\ & 3B & & = 0 \\ A & +3B & & = 0 \end{array}\right. ,$$

cuja única solução é $A = B = C = 0$. Portanto, S' é linearmente independente.

Segue que $S' = \{v_1, v_2, v_4\} = \{(1,2,0,1), (1,0,3,3), (1,0,0,0)\}$ é uma base para o subespaço gerado por S e, consequentemente, $\dim([S]) = 3$.

Solução 2: Considere a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formada colocando os vetores geradores nas linhas. Escalonando, obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_2]{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + \frac{3}{2}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Como a última linha está associada ao vetor v_4 e nela aparece apenas zeros, concluímos que v_4 é escrito como combinação linear dos demais vetores e, além disso, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente. Logo, $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,2,0,1), (1,0,3,3), (0,2,-1,0)\}$ é uma base para o subespaço gerado por S.

Observação: Do processo de escalonamento, o conjunto $\{(1,2,0,1), (0,-2,3,2), (0,0,2,2)\}$ também forma uma base do subespaço gerado por S, já que eles são combinações lineares dos vetores v_1, v_2 e v_3.

2.

Solução 1: Considere o conjunto $S' \cup \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{v_1, v_2, v_4, e_2, e_3, e_4\}$, onde e_i é o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^4$ (note que $v_4 = e_1$). Como tal conjunto contém todos os vetores da base canônica, ele gera $\mathbb{R}^4$. Porém ele não é linearmente independente, pois possui mais vetores que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Vamos encontrar quais dos novos vetores adicionados, e_2, e_3, e_4, podem ser escritos como combinação linear dos demais.

Sejam $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ tais que $Av_1 + Bv_2 + Cv_4 + De_2 + Ee_3 + Fe_4 = 0$. Como

$$Av_1 + Bv_2 + Cv_4 + De_2 + Ee_3 + Fe_4 = (A + B + C, 2A + D, 3B + E, A + 3B + F),$$

obtemos o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{lllllll} A & +B & +C & & & & =0 \\ 2A & & & +D & & & =0 \\ & 3B & & & +E & & =0 \\ A & +3B & & & & +F & =0. \end{array}\right.$$

Vamos tomar $E, F \in \mathbb{R}$ como variáveis livres. Da terceira equação, temos $B = -\frac{1}{3}E$ e, substituindo esse resultado na quarta equação, $A = E - F$. Com isso, obtemos $D = -2A = -2E + 2F$ da segunda equação e $C = -A - B = -\frac{2}{3}E + F$ da primeira equação.

Portanto, a solução é $A = E - F, B = -\frac{1}{3}E, C = -\frac{2}{3}E + F, D = -2E + 2F$, sendo $E, F \in \mathbb{R}$ variáveis livres.

Tomando $E = 1, F = 0$, temos que $v_1 - \frac{1}{3}v_2 - \frac{2}{3}v_4 - 2e_2 + e_3 = 0$ e, portanto,

$$e_3 = -v_1 + \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{3}v_4 + 2e_2.$$

Tomando $E = 0, F = 1$, temos que $-v_1 + v_4 + 2e_2 + e_4 = 0$ e, portanto,

$$e_4 = v_1 - v_4 - 2e_2.$$

Logo, $\mathbb{R}^4 = [\{v_1, v_2, v_4, e_2, e_3, e_4\}] = [\{v_1, v_2, v_4, e_2\}]$.

Como temos um conjunto de quatro vetores gerando $\mathbb{R}^4$, tal conjunto também deve ser linearmente independente, vamos verificar. Sejam, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $av_1 + bv_2 + cv_4 + de_2 = 0$. Como

$$\begin{array}{rcl} av_1 + bv_2 + cv_4 + de_2 & = & a(1,2,0,1) + b(1,0,3,3) + c(1,0,0,0) + d(0,1,0,0) \\ & = & (a+b+c, 2a+d, 3b, a+3b), \end{array}$$

obtemos o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{lllll} a & +b & +c & & =0 \\ 2a & & & d & =0 \\ & 3b & & & =0 \\ a & +3b & & & =0, \end{array}\right.$$

cuja única solução é $a = b = c = d = 0$. Segue que $\{v_1, v_2, v_4, e_2\}$ é um conjunto linearmente independente.

Logo, $\{v_1, v_2, v_4, e_2\}$ é uma base para $\mathbb{R}^4$ que contém S' (base para o subespaço vetorial gerado por S encontrada no item anterior).

Observação: Todo conjunto gerador de $\mathbb{R}^4$ com 4 vetores é linearmente independente e, portanto, é uma base para $\mathbb{R}^4$. De fato, caso contrário, poderíamos remover os elementos que são combinação linear dos demais, obtemos uma base para $\mathbb{R}^4$ com menos de 4 vetores, o que não é possível.

Solução 2:

Para completar a uma base de $\mathbb{R}^4$, construímos uma nova matriz a partir das linhas não nulas da matriz escalonada (1), adicionando linhas referentes a vetores da base canônica ao final (mantendo a forma escalonada):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No caso, adicionamos o vetor $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Concluímos que $\{v_1, v_2, v_3, e_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ que contém $\{v_1, v_2, v_3\}$, base encontrada para o subespaço gerado por S.

3. Como v_1 e v_2 não são múltiplos um do outro, então $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente e, portanto, é uma base para $[\{v_1, v_2\}] = U$. Logo, $\dim(U) = 2$. Analogamente, $\{v_3, v_4\}$ é uma base para W e $\dim(W) = 2$.

Para calcular a dimensão de $U \cap W$, observamos que $U + W = [S]$ e, portanto, $\dim(U + W) = \dim([S]) = 3$ (pelo primeiro item dessa questão). Logo, por um resultado estudado (Teorema 3.6.5 do livro-texto), concluímos que

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Questão 3 Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ de polinômios a coeficientes reais de grau menor ou igual a 3, e considere os subsespaços vetoriais:

$$U = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) = p(2) = 0\}, \qquad W = [\{1, t, t^3\}].$$

1. [1,5 pontos] Encontre uma base para U e determine a sua dimensão.

2. [1,5 pontos] Encontre uma base para $U \cap W$ e uma base para $U + W$.

SOLUÇÃO:

1. Vamos encontrar um conjunto gerador de U. Seja $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \in U$, pelas restrições temos o sistema linear

$$\begin{cases} 0 = & p(0) = a \\ 0 = & p(2) = a + 2b + 4c + 8d, \end{cases}$$

cuja solução é $a = 0$ e $b = -2c - 4d$, sendo $c, d \in \mathbb{R}$ variáveis livres. Portanto,

$$p(t) = (-2c - 4d)t + ct^2 + dt^3 = c(t^2 - 2t) + d(t^3 - 4t).$$

Logo, $\{t^2 - 2t, t^3 - 4t\}$ é um conjunto gerador de U. Além disso, como $t^2 - 2t$ e $t^3 - 4t$ são polinômios de graus distintos, segue que um não é múltiplo do outro e, portanto, $\{t^2 - 2t, t^3 - 4t\}$ é linearmente independente.

Assim, concluímos que $\{t^2 - 2t, t^3 - 4t\}$ é uma base de U e, consequentemente, $\dim(U) = 2$.

2. Para encontrar uma base para $U \cap W$, vamos primeiro determinar um conjunto gerador de $U \cap W$.

Seja $q(t) \in U \cap W$. Como $q(t) \in W$, então $q(t)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores do conjunto $\{1, t, t^3\}$, ou seja, existem $A, B, C \in \mathbb{R}$ tais que

$$q(t) = A + Bt + Ct^3.$$

Por outro lado, como $q(t) \in U$, então $q(0) = q(2) = 0$ e temos o sistema linear

$$\begin{cases} 0 & = & q(0) = A \\ 0 & = & q(2) = A + 2B + 8C, \end{cases}$$

cuja solução é $A = 0, B = -4C$, sendo $C \in \mathbb{R}$ variável livre. Portanto,

$$q(t) = 0 + (-4C)t + Ct^3 = C(t^3 - 4t).$$

Logo, $\{t^3 - 4t\}$ é um conjunto gerador de $U \cap W$. Além disso, tal conjunto é linearmente independente, pois $t^3 - 4t$ não é um vetor nulo. Concluímos que $\{t^3 - 4t\}$ é uma base para $U \cap W$.

Agora, vamos encontrar uma base para $U + W$. Como $U = [\{t^2 - 2t, t^3 - 4t\}]$ e $W = [\{1, t, t^3\}]$, temos que $U + W = [\{1, t, t^3, t^2 - 2t, t^3 - 4t\}]$. Tal conjunto gerador é linearmente dependente, pois possui mais vetores que $\dim(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}))$.

Nomeando $p_1(t) = 1, p_2(t) = t, p_3(t) = t^3, p_4(t) = t^2 - 2t, p_5(t) = t^3 - 4t$. Temos claramente que $p_5(t) = p_3(t) - 4p_2(t)$ e, portanto, $U + W = [\{1, t, t^3, t^2 - 2t, t^3 - 4t\}] = [\{1, t, t^3, t^2 - 2t\}]$. Vamos verificar se $\{1, t, t^3, t^2 - 2t\}$ é linearmente independente.

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $a + bt + ct^3 + d(t^2 - 2t) = 0$, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} a &= 0 \\ b - 2d &= 0 \\ d &= 0 \\ c &= 0, \end{cases}$$

cuja única solução é $a = b = c = d = 0$. Portanto, $\{1, t, t^3, t^2 - 2t\}$ é linearmente independente e gera $U + W$, portanto é uma base de $U + W$.

Observação: Para encontrar uma base de $U + W$, poderíamos observar que $\dim(U) = 2$, $\dim(W) = 3$ e $\dim(U \cap W) = 1$. Assim,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 3 - 1 = 4 = \dim(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}))$$

e, como $U + W \leq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, segue que $U + W = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Portanto, a base canônica $\{1, t, t^2, t^3\}$ é uma base de $U + W$.

Questão 4 Considere as bases $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\gamma = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, relacionadas da seguinte forma

$$\begin{cases} w_1 &= u_1 - u_2 - u_3 \\ w_2 &= 2u_2 + 3u_3 \\ w_3 &= 3u_1 + u_3 \end{cases}$$

1. [1 ponto] Considere o vetor $v \in \mathbb{R}^3$ que tem por coordenadas na base γ a seguinte tripla:

$$[v]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   Determine as coordenadas de v na base β, isto é, calcule $[v]_\beta$.

2. [1 ponto] Entre as opções listadas abaixo, encontre as matrizes de mudança de base $[I]_\gamma^\beta$ e $[I]_\beta^\gamma$:

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad (ii)\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (iii)\ (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(iv)\ A^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -9 & -4 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad (v)\ \text{nenhuma das anteriores}$$

SOLUÇÃO:

1. Pelas coordenadas de v na base γ, temos que $v = w_1 + 2w_2 + 3w_3$. Utilizando as relações entre os vetores das base β e γ, obtemos

$$v = w_1 + 2w_2 + 3w_3 = (u_1 - u_2 - u_3) + 2(2u_2 + 3u_3) + 3(3u_1 + u_3) = 10u_1 + 3u_2 + 8u_3.$$

Portanto, $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$.

Observação: Um outro jeito de calcular $[v]_\beta$ é escrever a matriz mudança de base $[I]_\beta^\gamma$ (como no próximo item) e calcular o produto $[I]_\beta^\gamma [v]_\gamma$

2. Construímos a matriz de mudança de base $[I]_\beta^\gamma$ colocando na i-ésima coluna as coordenadas de w_i na base β ($i = 1, 2, 3$). Pelas relações entre os vetores das bases de β e γ, temos

$$[w_1]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, [w_2]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, [w_3]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

e, portanto,

$$[I]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz em (ii).

Da teoria sabemos que $[I]_\beta^\gamma$ é invertível e $[I]_\gamma^\beta = ([I]_\beta^\gamma)^{-1}$, portanto $[I]_\gamma^\beta$ é a matriz em (i). Vamos conferir calculando a inversa de $[I]_\beta^\gamma$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow -2L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -9 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

Portanto,

$$[I]_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

é, de fato, a matriz em (i). Concluímos que $[I]_\gamma^\beta$ é a matriz em (i) e $[I]_\beta^\gamma$ é a matriz em (ii).