

Análise de dados e métodos de diagnóstico em modelos normais lineares

Prof. Caio Azevedo

Forma matricial para do MNL

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & \dots & X_{1p} \\ X_{21} & \dots & X_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \dots & X_{np} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

- Suposição $\boldsymbol{\xi} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ (que é o vetor de erros).
- \mathbf{Y} é o vetor das variáveis resposta.
- O índice n da variável resposta é geral e pode representar combinações de índices.
- \mathbf{X} é a matriz de plajenamento (ou delineamento) que define a parte sistemática do modelo.

Suposições

- As principais suposições do MNL são:
 - Homocedasticidade.
 - Independência dos erros.
 - Normalidade dos erros.

Suposições

- As principais suposições do MNL são:
 - Homocedasticidade.
 - Independência dos erros.
 - Normalidade dos erros.
- Como verificar as suposições do modelo?

Suposições

- As principais suposições do MNL são:
 - Homocedasticidade.
 - Independência dos erros.
 - Normalidade dos erros.
- Como verificar as suposições do modelo?
- Como proceder se uma ou mais de uma suposição não for (satisfatoriamente) válida?

Resíduos

- Como os erros (ξ) não são observados (observáveis), precisamos de algum preditor apropriado para avaliar as suposições feitas sobre eles.

Resíduos

- Como os erros (ξ) não são observados (observáveis), precisamos de algum preditor apropriado para avaliar as suposições feitas sobre eles.
- Já definimos os resíduos: $\hat{\xi}_i = R_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \mathbf{x}'_i \hat{\beta}$.

Resíduos

- Como os erros (ξ) não são observados (observáveis), precisamos de algum preditor apropriado para avaliar as suposições feitas sobre eles.
- Já definimos os resíduos: $\hat{\xi}_i = R_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \mathbf{x}'_i \hat{\beta}$.
- Matricialmente $\mathbf{R} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{Y}$,
 $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$.

Resíduos

- Como os erros (ξ) não são observados (observáveis), precisamos de algum preditor apropriado para avaliar as suposições feitas sobre eles.
- Já definimos os resíduos: $\hat{\xi}_i = R_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \mathbf{x}'_i \hat{\beta}$.
- Matricialmente $\mathbf{R} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{Y}$,
 $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$.
- Assim temos, sob as suposições do modelo, que
 $\mathbf{R} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{H}))$ (são correlacionados).

Cont.

- Defina $T_i^* = \frac{R_i}{\sqrt{S^2(1-h_{ii})}}$, em que $S^2 = \frac{1}{n-p} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$ e h_{ii} é o i -ésimo elemento da diagonal principal de \mathbf{H} .

Cont.

- Defina $T_i^* = \frac{R_i}{\sqrt{S^2(1-h_{ii})}}$, em que $S^2 = \frac{1}{n-p} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$ e h_{ii} é o i -ésimo elemento da diagonal principal de \mathbf{H} .
- A divisão por $(1 - h_{ii})$ atenua a correlação entre os resíduos.

Cont.

- Defina $T_i^* = \frac{R_i}{\sqrt{S^2(1-h_{ii})}}$, em que $S^2 = \frac{1}{n-p} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$ e h_{ii} é o i -ésimo elemento da diagonal principal de \mathbf{H} .
- A divisão por $(1 - h_{ii})$ atenua a correlação entre os resíduos.
- Contudo, R_i e S^2 não são independentes.

Cont.

- Defina $T_i^* = \frac{R_i}{\sqrt{S^2(1-h_{ii})}}$, em que $S^2 = \frac{1}{n-p} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$ e h_{ii} é o i -ésimo elemento da diagonal principal de \mathbf{H} .
- A divisão por $(1 - h_{ii})$ atenua a correlação entre os resíduos.
- Contudo, R_i e S^2 não são independentes.
- Porém, $S_{(i)}^2$ e R_i o são (em que $S_{(i)}^2$ é S^2 correspondente ao modelo sem a i -ésima observação).

Cont.

- Defina $T_i^* = \frac{R_i}{\sqrt{S^2(1-h_{ii})}}$, em que $S^2 = \frac{1}{n-p} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$ e h_{ii} é o i -ésimo elemento da diagonal principal de \mathbf{H} .
- A divisão por $(1 - h_{ii})$ atenua a correlação entre os resíduos.
- Contudo, R_i e S^2 não são independentes.
- Porém, $S_{(i)}^2$ e R_i o são (em que $S_{(i)}^2$ é S^2 correspondente ao modelo sem a i -ésima observação).
- Pode-se provar, além disso, que $S_{(i)}^2 = S^2 \left(\frac{n-p-T_i^2}{n-p-1} \right)$.

Cont.

- Defina $T_i^* = \frac{R_i}{\sqrt{S^2(1-h_{ii})}}$, em que $S^2 = \frac{1}{n-p} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})' (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$ e h_{ii} é o i -ésimo elemento da diagonal principal de \mathbf{H} .
- A divisão por $(1 - h_{ii})$ atenua a correlação entre os resíduos.
- Contudo, R_i e S^2 não são independentes.
- Porém, $S_{(i)}^2$ e R_i o são (em que $S_{(i)}^2$ é S^2 correspondente ao modelo sem a i -ésima observação).
- Pode-se provar, além disso, que $S_{(i)}^2 = S^2 \left(\frac{n-p-T_i^2}{n-p-1} \right)$.
- Tem-se, então, que $T_i = \frac{R_i}{\sqrt{S_{(i)}^2(1-h_{ii})}} \sim t_{(n-p-1)}$, sob a validade das hipóteses do modelo.

O que e como observar nos resíduos?

- Gráfico de dispersão dos resíduos versus seu índice: Ausência de tendência (autocorrelações, por exemplo).

O que e como observar nos resíduos?

- Gráfico de dispersão dos resíduos versus seu índice: Ausência de tendência (autocorrelações, por exemplo).
- Gráfico de dispersão dos resíduos versus valores ajustados: Variâncias parecidas para diferentes “grupos” de resíduos.

O que e como observar nos resíduos?

- Gráfico de dispersão dos resíduos versus seu índice: Ausência de tendência (autocorrelações, por exemplo).
- Gráfico de dispersão dos resíduos versus valores ajustados: Variâncias parecidas para diferentes “grupos” de resíduos.
- Boxplot e/ou gráfico de quantis-quantis: Simetria, ausência de “out-liers” e multimodalidade.

O que e como observar nos resíduos?

- Gráfico de dispersão dos resíduos versus seu índice: Ausência de tendência (autocorrelações, por exemplo).
- Gráfico de dispersão dos resíduos versus valores ajustados: Variâncias parecidas para diferentes “grupos” de resíduos.
- Boxplot e/ou gráfico de quantis-quantis: Simetria, ausência de “out-liers” e multimodalidade.
- Problema no gráfico de quantis-quantis: Visualmente, muitas vezes, é complicado avaliar a proximidade dos quantis.

O que e como observar nos resíduos?

- Gráfico de dispersão dos resíduos versus seu índice: Ausência de tendência (autocorrelações, por exemplo).
- Gráfico de dispersão dos resíduos versus valores ajustados: Variâncias parecidas para diferentes “grupos” de resíduos.
- Boxplot e/ou gráfico de quantis-quantis: Simetria, ausência de “out-liers” e multimodalidade.
- Problema no gráfico de quantis-quantis: Visualmente, muitas vezes, é complicado avaliar a proximidade dos quantis.
- Solução: criar bandas de confiança.

Gráfico de envelopes

1 Ajusta-se o modelo e obtém-se $t_i = \frac{r_i}{\sqrt{s_{(i)}^2(1-h_{ii})}}$.

Gráfico de envelopes

- 1 Ajusta-se o modelo e obtém-se $t_i = \frac{r_i}{\sqrt{s_{(i)}^2(1-h_{ii})}}$.
- 2 Gera-se n observações $N(0,1)$ as quais são armazenadas em $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$.

Gráfico de envelopes

- 1 Ajusta-se o modelo e obtem-se $t_i = \frac{r_i}{\sqrt{s_{(i)}^2(1-h_{ii})}}$.
- 2 Gera-se n observações $N(0,1)$ as quais são armazenadas em $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$.
- 3 Ajusta-se o modelo considerando-se \mathbf{y} e obtem-se $r_i = y_i - \tilde{y}_i$ (relativo ao modelo ajustado nesta etapa).

Gráfico de envelopes

- 1 Ajusta-se o modelo e obtém-se $t_i = \frac{r_i}{\sqrt{s_{(i)}^2(1-h_{ii})}}$.
- 2 Gera-se n observações $N(0,1)$ as quais são armazenadas em $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$.
- 3 Ajusta-se o modelo considerando-se \mathbf{y} e obtém-se $r_i = y_i - \tilde{y}_i$ (relativo ao modelo ajustado nesta etapa).
- 4 Obtem-se agora, $t_i = \frac{r_i}{\sqrt{s_{(i)}^2(1-h_{ii})}}$, $i = 1, \dots, n$

Gráfico de envelopes

- 1 Ajusta-se o modelo e obtém-se $t_i = \frac{r_i}{\sqrt{s_{(i)}^2(1-h_{ii})}}$.
- 2 Gera-se n observações $N(0,1)$ as quais são armazenadas em $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$.
- 3 Ajusta-se o modelo considerando-se \mathbf{y} e obtém-se $r_i = y_i - \tilde{y}_i$ (relativo ao modelo ajustado nesta etapa).
- 4 Obtem-se agora, $t_i = \frac{r_i}{\sqrt{s_{(i)}^2(1-h_{ii})}}$, $i = 1, \dots, n$
- 5 Repete-se os passos (2)-(4), m vezes. Logo, teremos t_{ij} , $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

Gráfico de envelopes

- 1 Ajusta-se o modelo e obtém-se $t_i = \frac{r_i}{\sqrt{s_{(i)}^2(1-h_{ii})}}$.
- 2 Gera-se n observações $N(0,1)$ as quais são armazenadas em $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$.
- 3 Ajusta-se o modelo considerando-se \mathbf{y} e obtém-se $r_i = y_i - \tilde{y}_i$ (relativo ao modelo ajustado nesta etapa).
- 4 Obtem-se agora, $t_i = \frac{r_i}{\sqrt{s_{(i)}^2(1-h_{ii})}}$, $i = 1, \dots, n$
- 5 Repete-se os passos (2)-(4), m vezes. Logo, teremos t_{ij} , $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.
- 6 Colocamos cada grupo de n resíduos em ordem crescente, obtendo-se $t_{(i)j}$.

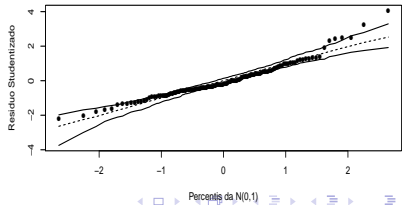
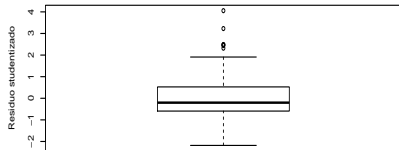
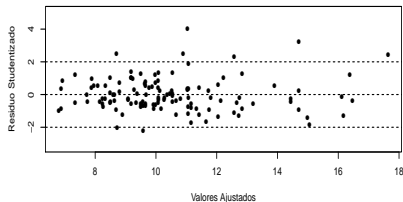
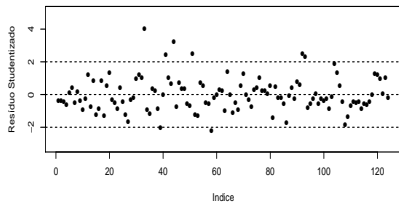
Gráfico de envelopes

- 1 Ajusta-se o modelo e obtém-se $t_i = \frac{r_i}{\sqrt{s_{(i)}^2(1-h_{ii})}}$.
- 2 Gera-se n observações $N(0,1)$ as quais são armazenadas em $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$.
- 3 Ajusta-se o modelo considerando-se \mathbf{y} e obtém-se $r_i = y_i - \tilde{y}_i$ (relativo ao modelo ajustado nesta etapa).
- 4 Obtem-se agora, $t_i = \frac{r_i}{\sqrt{s_{(i)}^2(1-h_{ii})}}$, $i = 1, \dots, n$
- 5 Repete-se os passos (2)-(4), m vezes. Logo, teremos t_{ij} , $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.
- 6 Colocamos cada grupo de n resíduos em ordem crescente, obtendo-se $t_{(i)j}$.
- 7 Obtemos os limites $t_{(i)l} = \min_j t_{(i)j}$ e $t_{(i)s} = \max_j t_{(i)j}$. Assim, os limites correspondentes ao i -ésimo resíduo serão dados por $t_{(i)l}$ e $t_{(i)s}$.

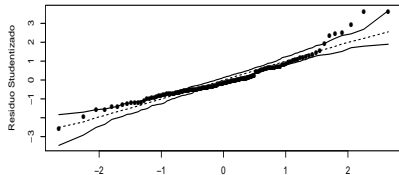
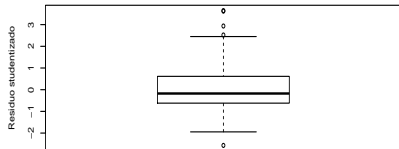
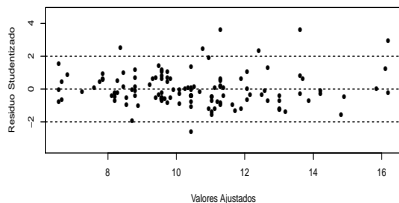
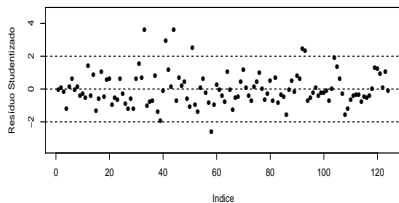
Exemplo 1: considerando as etiologias cardíacas

- Voltemos ao exemplo 1.
- Considerando primeiro o modelo que contempla os grupos e depois o modelo reduzido.

Modelo 1 (considerando as etiologias)



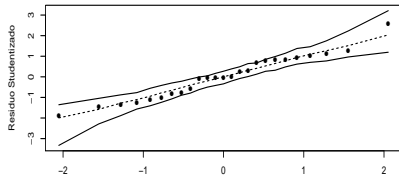
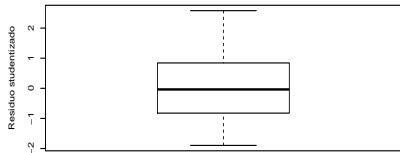
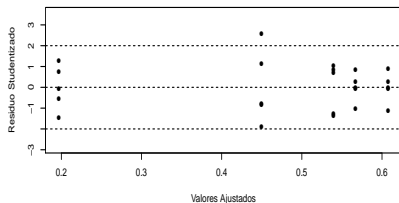
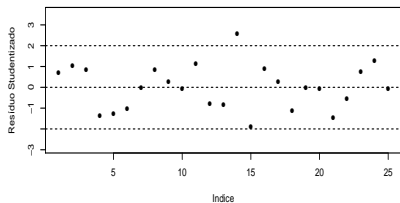
Modelo 2 (um único grupo)



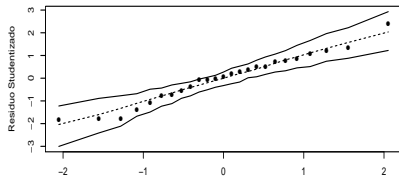
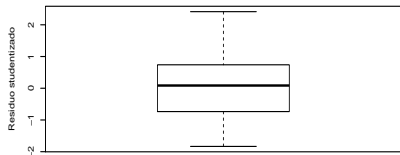
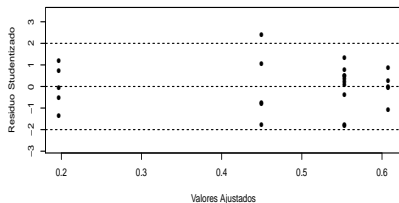
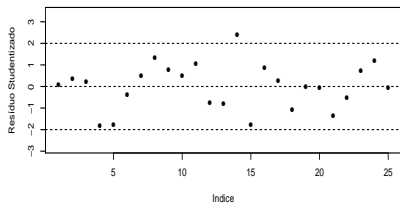
Exemplo 2: considerando todos os tipos de solvente

- Voltemos ao exemplo 2.
- Considerando primeiro o modelo que contempla todos os tipos de solvente e depois o modelo reduzido.

Modelo 1 (considerando as etiologias)



Modelo 2 (um único grupo)



Ausência de normalidade

- Voltemos ao MNL:

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\xi}_n$$

Ausência de normalidade

- Voltemos ao MNL:

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{X}_n\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\xi}_n$$

- Suponha que $\mathcal{E}(\boldsymbol{\xi}_n) = \mathbf{0}_n$ e $\text{Cov}(\boldsymbol{\xi}_n) = \sigma^2\mathbf{I}_n$.

Ausência de normalidade

- Voltemos ao MNL:

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{X}_n \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\xi}_n$$

- Suponha que $\mathcal{E}(\boldsymbol{\xi}_n) = \mathbf{0}_n$ e $\text{Cov}(\boldsymbol{\xi}_n) = \sigma^2 \mathbf{I}_n$.
- Suposições adicionais

1 $\max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{x}'_{nk} (\mathbf{X}'_n \mathbf{X}_n)^{-1} \mathbf{x}_{nk} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}'_n \mathbf{X}_n = \mathbf{V}$.

Ausência de normalidade

- Voltemos ao MNL:

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{X}_n \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\xi}_n$$

- Suponha que $\mathcal{E}(\boldsymbol{\xi}_n) = \mathbf{0}_n$ e $\text{Cov}(\boldsymbol{\xi}_n) = \sigma^2 \mathbf{I}_n$.

- Suposições adicionais

1 $\max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{x}'_{nk} (\mathbf{X}'_n \mathbf{X}_n)^{-1} \mathbf{x}_{nk} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{X}'_n \mathbf{X}_n = \mathbf{V}$.

- Pelo Teorema Central do Limite (TCL) de Linderberg-Feller (se $n \rightarrow \infty$), então

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{D} N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{V}^{-1})$$

Comentário

- Para n suficientemente grande

$$\hat{\beta} \approx N_p(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}_n\mathbf{X}_n)^{-1})$$

- Em relação à primeira suposição adicional, considere que

$$\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_{n_1} \\ \mathbf{x}'_{n_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_{n_n} \end{pmatrix}; \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n_2} \end{pmatrix}; \mathbf{X}'_n\mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix}$$

- Assim

$$\mathbf{x}'_{n_1}(\mathbf{X}'_n\mathbf{X}_n)^{-1}\mathbf{x}_{n_1} = n_1^{-1}; \mathbf{x}'_{n_2}(\mathbf{X}'_n\mathbf{X}_n)^{-1}\mathbf{x}_{n_2} = n_2^{-1}$$

Ausência de homocedasticidade e presença de correlação

- Suponha a mesma estrutura anterior mas $Cov(\xi) = \sigma^2 \Sigma$, Σ conhecida.

Ausência de homocedasticidade e presença de correlação

- Suponha a mesma estrutura anterior mas $Cov(\xi) = \sigma^2 \Sigma$, Σ conhecida.
- Defina

$$\mathbf{Z} = \mathbf{W}\beta + \delta \quad (1)$$

em que

$$\Sigma = \Sigma^{1/2} \Sigma^{1/2} \text{(decomposição de Cholesky)}$$

$$\mathbf{Z} = \Sigma^{-1/2} \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{W} = \Sigma^{-1/2} \mathbf{X}$$

$$\delta = \Sigma^{-1/2} \xi$$

Cont.

- Assim, $\mathcal{E}(\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\mathcal{E}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$ e $\text{Cov}(\boldsymbol{\delta}) = \sigma^2\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} = \sigma^2\mathbf{I}$.

Cont.

- Assim, $\mathcal{E}(\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\mathcal{E}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$ e $\text{Cov}(\boldsymbol{\delta}) = \sigma^2\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} = \sigma^2\mathbf{I}$.
- Logo, o estimador de MQO de $\boldsymbol{\beta}$, baseado no modelo (1), é dado por:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{Z} = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y}$$

Cont.

- Assim, $\mathcal{E}(\boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\mathcal{E}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$ e $\text{Cov}(\boldsymbol{\delta}) = \sigma^2\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} = \sigma^2\mathbf{I}$.
- Logo, o estimador de MQO de $\boldsymbol{\beta}$, baseado no modelo (1), é dado por:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{W}'\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{Z} = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y}$$

- Se $\boldsymbol{\xi} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{\Sigma})$, então

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_p(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1})$$

Cont.

- Se a suposição de normalidade for desconsiderada mas as suposições relativas ao TCL anterior se verificarem, então

$$\hat{\beta} \approx N_p(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X})^{-1})$$

Cont.

- Se a suposição de normalidade for desconsiderada mas as suposições relativas ao TCL anterior se verificarem, então

$$\hat{\beta} \approx N_p(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X})^{-1})$$

- Quando Σ é diagonal mas ($\neq \mathbf{I}$), dizemos que $\hat{\beta}$ é o estimador de mínimos quadrados ponderados (MQP) de β (baseado no modelo original).

Cont.

- Se a suposição de normalidade for desconsiderada mas as suposições relativas ao TCL anterior se verificarem, então

$$\hat{\beta} \approx N_p(\beta, \sigma^2(\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X})^{-1})$$

- Quando Σ é diagonal mas ($\neq \mathbf{I}$), dizemos que $\hat{\beta}$ é o estimador de mínimos quadrados ponderados (MQP) de β (baseado no modelo original).
- Quando Σ não é diagonal, dizemos que $\hat{\beta}$ é o estimador de mínimos quadrados generalizados (MQG) de β (baseado no modelo original).

Σ desconhecido

- Considere novamente o modelo original, $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \xi$, com $\mathcal{E}(\xi) = \mathbf{0}$ e $\text{Cov}(\xi) = \Sigma$.

Σ desconhecido

- Considere novamente o modelo original, $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \xi$, com $\mathcal{E}(\xi) = \mathbf{0}$ e $\text{Cov}(\xi) = \Sigma$.
- Uma alternativa consiste em considerar o estimador de dois estágios de Aitken, ou seja

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\hat{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\hat{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y}$$

em que $\hat{\Sigma}$ é um estimador consistente de Σ , ($\hat{\Sigma} \xrightarrow{P} \Sigma$).

Cont.

- Assim, temos que (se válidas as condições do TCL apresentado anteriormente), que:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{D} N_p(\mathbf{0}, \mathbf{V}^{-1})$$

em que $\mathbf{V} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}(\mathbf{X}'_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{X}_n)$

Cont.

- Assim, temos que (se válidas as condições do TCL apresentado anteriormente), que:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{D} N_p(\mathbf{0}, \mathbf{V}^{-1})$$

em que $\mathbf{V} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}(\mathbf{X}'_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1} \mathbf{X}_n)$

- Em geral, toma-se $\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{X}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \mathbf{X}$.