Testes de hipóteses estatísticas: teoria assintótica

Prof. Caio Azevedo

Introdução

- Outras formas de testar hipóteses de interesse é considerdar estatísticas cuja distribuição assintótica (em geral, em função do tamanho da amostra), seja conhecida e fácil de ser utilizada.
- Em geral, o tamanho da amostra precisa ser " suficientemente grande".
- Por exemplo, seja $W_n = W(\boldsymbol{X})$ um estimador de $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}$ e suponha que

$$Z_n = \frac{W_n - \theta}{\sigma_n} \xrightarrow[n \to \infty]{D} N(0,1)$$

  ou $Z_n \approx N(0,1)$, para n suficientemente grande.
- A estatística W_n pode ser utilizada para testar as hipóteses da forma:
  1. $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
  2. $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.
  3. $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$.

Exemplos

- Se σ_n não depende de θ, então $Z_n = \frac{W_n - \theta_0}{\sigma_n}$ é uma estatística.
- Em 1) a RC é dada por $RC = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : |z_n| > c_0\}$, em que dado α, c_0 é obtido a partir de (sob H_0:)

$$\alpha \equiv \lim_{n \to \infty} P(|Z_n| > c_0) = P(|Z| > c_0)$$

  $\rightarrow \alpha \approx P(|Z| > c_0), Z \sim N(0,1)$.
- Em 2) rejeita-se H_0 se $z_n > c_0^*$ e c_0^* é determinado por $\alpha \approx P(Z > c_0^*)$.
- Em 3) rejeita-se H_0 se $z_n < c_0^{**}$ e c_0^{**} é determinado por $\alpha \approx P(Z < c_0^{**})$.

Exemplos

- Se $\sigma_n = \sigma(\theta)$ depender de θ, podemos considerar um estimador consistente para ele, por exemplo W_n, ou utilizar S_n (desvio-padrão das observações W_n), ou seja

$$S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(W_i - \overline{W})^2, \overline{W} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i.$$

- Assim, pelo teorema de Slutsky, temos que:

$$Z_n^* = \frac{W_n - \theta}{S_n} \xrightarrow[n\to\infty]{D} N(0,1)$$

- A va Z_n^* acima pode também ser utilizada para testar as hipóteses 1), 2) e 3).
- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ e considere as hipóteses $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.

Exemplos

- Suponha que n seja suficientemente grande e considere o emv de θ, isto é, $\widehat{\theta}_n = \overline{X}$. Pelo TCL, temos que:

$$Z_n^* = \frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{D} N(0,1)$$

- Ou, pelo Teorema de Slutsky

$$Z_n = \frac{\widehat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{D} N(0,1)$$

- Defina $Z_n' = \frac{\widehat{\theta}_n - \theta_0}{\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}}$.

Exemplos

- Portanto, rejeitamos H_0 se $z_n' > c_0$. Dado α, c_0 é obtido a partir de

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} P_{\theta_0}(Z_n' > c_0) = \sup_{\theta\in\Theta_0} \lim_{n\to\infty} P_\theta(Z_n' > c_0)$$

- Exercício: repetir os desenvolvimentos para as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
- Obs: Para um teste assintótico, o respectivo tamanho é calculado por (RC = região crítica):

$$\alpha^* = \sup_{\theta\in\Theta_0} \lim_{n\to\infty} P_\theta(\boldsymbol{X}_n \in RC)$$

Testes assintóticos baseados no método de Máxima Verossimilhança (MV)

- Na literatura, essencialmente, existem três estatísticas (dentro do cotexto em questão) para testar

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ vs } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 ; \Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$$

- São elas:
  a) Estatística da razão de verossimilhanças (ERV).
  b) Estatística de Wald (EW).
  c) Estatística escore (EE).
- Sob as Condições de Regularidade (essencialmente aquelas vistas em `http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/aula_Met_Estim_Mest_2S_2019.pdf`, para os emv) as estatísticas acima apresentam distribuição assintótica (sob H_0) χ^2_r, em que r: número de parâmetros em Θ - número de parâmetros em Θ_0 $\equiv \dim(\Theta) - \dim(\Theta_0)$.

Testes assintóticos baseados no método de MV

a) ERV. Temos que a ERV é dada por

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\boldsymbol{\theta})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta})} = \frac{L(\widetilde{\theta}_0)}{L(\widetilde{\theta})}$$

- Mas $Q_{RV} = -2 \ln \lambda(\boldsymbol{X}) = 2(l(\widehat{\theta}) - l(\widehat{\theta}_0))$
- Sob as CR e H_0 temos que $Q_{RV} \xrightarrow[n \to \infty]{D} \chi^2_{(r)}$.
- A RC é dada por $R = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : \lambda(\boldsymbol{x}) \leq c\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : Q_{RV}(\boldsymbol{x}) \geq c_0\}$.

Testes assintóticos baseados no método de MV

- Obs: em muitas situações, temos o interesse em testar hipóteses da forma $H_0 : g(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ vs $H_1 : g(\boldsymbol{\theta}) \neq \mathbf{0}$, em que $g : \mathcal{R}^k \rightarrow \mathcal{R}^r$, $1 \leq r \leq k$, é um vetor de funções diferenciáveis . Vamos considerar:

$$g(\boldsymbol{\theta}) = (g_1(\boldsymbol{\theta}), ..., g_r(\boldsymbol{\theta}))'$$

- $\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ com posto completo ($=$ r), em que

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_r(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_r(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_r(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \end{pmatrix}$$

- A ERV nesse caso é dada por $Q_{RV} = 2(l(\widehat{\theta}) - l(\widehat{\theta}_0))$ em que $l(\widetilde{\theta}_0) = \sup_{g(\boldsymbol{\theta})=\mathbf{0}} l(\theta)$ e sob $H_0 : Q_{RV} \xrightarrow[n\to\infty]{D} \chi^2_{(r)}$,

Testes assintóticos baseados no método de MV

b) Estatística de Wald. Considere as hipóteses $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ vs $H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$.

- A estatística de Wald é dada por:

$$
\begin{aligned}
Q_W &= \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0\right)' \boldsymbol{I}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0\right) \\
&= n \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0\right)' \boldsymbol{I}_1(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0\right) \text{ (para amostras i.i.d.)}
\end{aligned}
$$

- Em que $\widehat{\theta}$ é o EMV de $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{I}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ é a Informação de Fisher no ponto $\boldsymbol{\theta} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}$.
- Nesse caso, $Q_W \xrightarrow[n \to \infty]{D} \chi^2_k$, com veremos a seguir.

Testes assintóticos baseados no método de MV

- Sob as CR, temos que ($\boldsymbol{A}^{1/2}$ é a decomposição de Cholesky de $\boldsymbol{A}$):

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow[n\to\infty]{D} N_k(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}))$$

$$\sqrt{n}\boldsymbol{I}_1^{1/2}(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow[n\to\infty]{D} N_k(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_k)$$

- Portanto,

$$n\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right)' \boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{\theta}) \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{D} \chi^2_k$$

- E, sob H_0 (teorema de Slutsky)

$$n\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0\right)' \boldsymbol{I}_1(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{D} \chi^2_k.$$

Testes assintóticos baseados no método de MV

- Agora, considere as hipóteses $H_0 : g(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ vs $H_1 : g(\boldsymbol{\theta}) \neq \mathbf{0}$ em que $g(.)$ é o vetor de funções como definido anteriormente.
- Neste caso, a estatística de Wald é definida por:

$$Q_W = ng(\widehat{\boldsymbol{\theta}})' \left[\left(\frac{\partial g(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)' \boldsymbol{I}_1^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \left(\frac{\partial g(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \right]^{-1} g(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$$

- Em que $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ é o emv de $\boldsymbol{\theta}$, sob o modelo irrestrito, e sob H_0 $Q_W \xrightarrow[n\to\infty]{D} \chi^2_r$.
- Obs: Sob as CR, se $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ é o emv de $\boldsymbol{\theta}$, então, pelo método delta (`http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/aula_Met_Estim_Mest_Int_TA_2S_2019.pdf`), podemos obter a distribuição assintótica de $g(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) - g(\boldsymbol{\theta})$

Testes assintóticos baseados no método de MV

- O resultado acima segue por Slutsky (junto com o método Delta).
- Temos que $RC = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : Q_W(\boldsymbol{x}) > c_0\}$, em que, dado α, c_0 é obtido através de $\alpha \approx P(Y > c_0)$, $Y \sim \chi^2_r$.
- Exemplo: Seja $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)' \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^2$ e considere as hipóteses

$$H_0 : \theta_1 = \theta_0 \text{ vs } H_1 : \theta_1 \neq \theta_0$$

- As hipóteses acima podem ser reescritas como:

$$H_0 : \theta_1 - \theta_0 = 0 \text{ vs } H_1 : \theta_1 - \theta_0 \neq 0$$

ou

$$H_0 : g(\boldsymbol{\theta}) = 0 \text{ vs } H_1 : g(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$$

- Mas, $g(\boldsymbol{\theta}) = \theta_1 - \theta_0 = \boldsymbol{A\theta} - \theta_0$, $\boldsymbol{A} = [1, 0]$ e $\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = (1, 0)'$.

Testes assintóticos baseados no método de MV

- Seja $\boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} I^{11}(\boldsymbol{\theta}) & I^{12}(\boldsymbol{\theta}) \\ I^{21}(\boldsymbol{\theta}) & I^{22}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}$
- Então:

$$Q_W = \left(\widehat{\theta}_1 - \theta_0\right)' \left[(1\ 0)\boldsymbol{I}^{-1}(1\ 0)'\right]^{-1} \left(\widehat{\theta}_1 - \theta_0\right) = \frac{(\widehat{\theta}_1 - \theta_0)^2}{I^{11}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}$$

c) Estatística Escore: Suponha as seguintes hipóteses, $H_0 : g(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$ vs $H_0 : g(\boldsymbol{\theta}) \neq \mathbf{0}$.

Testes assintóticos baseados no método de MV

- A função lagrangiana é dada por:

$$g(\boldsymbol{\theta};\lambda) = l(\boldsymbol{\theta}) + g'(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\lambda}, \lambda \in \mathcal{R}^r$$

- Se $\widetilde{\theta}_0$ é a emv de $\boldsymbol{\theta}$, sob H_0, então:

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}g(\boldsymbol{\theta};\lambda)\Big|_{\boldsymbol{\theta}=\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_0;\boldsymbol{\lambda}=\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}} = \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\Big|_{\boldsymbol{\theta}=\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_0} + \frac{\partial g'(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}\Big|_{\boldsymbol{\theta}=\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_0} = \mathbf{0}$$

- A estatística escore, para as hipóteses acima é definida (caso iid) por:

$$\begin{aligned} Q_S &= \frac{1}{n}\left(\frac{\partial l(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right)' \boldsymbol{I}_1^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)\left(\frac{\partial l(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right) \\ &= \frac{1}{n}\widehat{\boldsymbol{\lambda}}'\left(\frac{\partial g'(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right)' \boldsymbol{I}_1^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)\left(\frac{\partial g'(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0)}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right)\widehat{\boldsymbol{\lambda}} \end{aligned}$$

Testes assintóticos baseados no método de MV

- Sob H_0 e as CR, $Q_S \xrightarrow[n \to \infty]{D} \chi^2_r$. A RC é dada por $RC = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : Q_S(\boldsymbol{x}) > c_0\}$ e dado α, c_0 é obtido por $\alpha \approx P_{H_0}(Y > c_0)$, $Y \sim \chi^2_r$.
- Qual teste devemos utilizar? Note que o valor crítico (assintótico) dos testes, bem como as RC's, podem ser os mesmos, para uma mesma situação.
- Contudo, o valor observado pode diferir entre as três estatísticas.
- Além disso, o poder sob H_0 e a qualidade da aproximação pela distribuição de qui-quadrado, podem diferir entre elas.
- Critérios de escolha:
  1. Facilidade de aplicação.
  2. Qualidade da aproximação da distribuição assintótica em relação à verdadeira: (tamanho do teste).
  3. (Verdadeiro) poder, sob H_1, maior.

Testes assintóticos baseados no método de MV

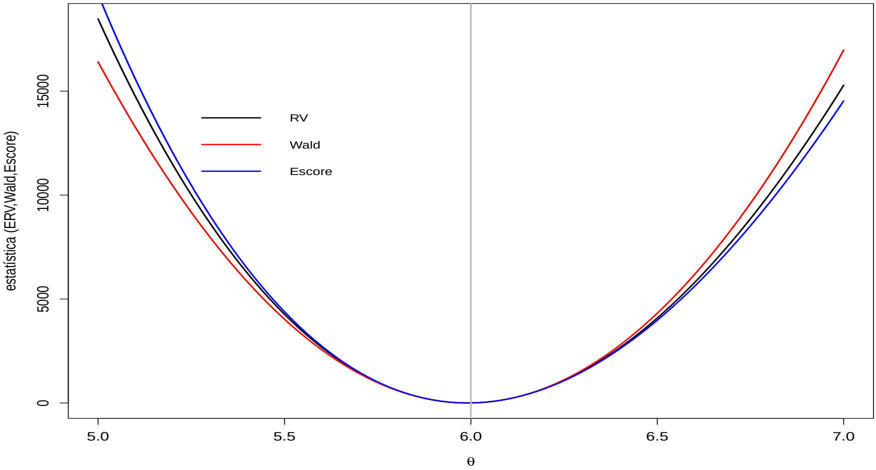
- Se a log-verossimilhança for quadrática os três testes serão equivalentes.
- Exemplo: $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim$ Poisson(θ). Queremos testar as hipóteses: $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0 \therefore H_0 : g(\theta) = \theta - \theta_0$
- Expressões necessárias

$$
\begin{aligned}
L(\theta) &= \frac{e^{-\theta}\theta^{n\overline{x}}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}; l(\theta) = -n\theta + (n\overline{x}) \ln \theta + c(\boldsymbol{x}) \\
S(\theta) &= -n + \frac{n\overline{x}}{\theta}; H(\theta) = -\frac{n\overline{x}}{\theta^2}; I(\theta) = \frac{n}{\boldsymbol{\theta}}
\end{aligned}
$$

- Assim, temos que (veja o slide seguinte):

$$
\begin{aligned}
Q_R &= 2(l(\widehat{\theta_0}) - l(\theta_0)) = -2n\left(\overline{X} - \theta_0\right) + 2n\overline{X}\ln\left(\frac{\overline{X}}{\theta_0}\right) \\
Q_W &= \left(\overline{X} - \theta_0\right)^2 \frac{n}{\overline{X}}; Q_S = \left(\overline{X} - \theta_0\right)^2 \frac{n}{\theta_0}
\end{aligned}
$$

Comportamento dos testes Exemplo da Poisson



Cont.

- Encontre o p-valor (assintótico) dos 3 testes quando n $= 15$, $\overline{x} = 5,5$, $\theta_0 = 4$.
- Temos que: $q_{RV} = 7,5$, $q_W = 6,3$ e $q_S = 8,43$. Em todos os casos, assumindo $\alpha = 0,05$, temos que $c_0 = 3,84$ (usando a tabela constante no site do curso).
- Os p-valores calculados são, respectivamente, $p_{RV} = 0,0060$, $p_W = 0,0132$, $p_S = 0,0037$, $p = P(Y > q_{(.)}(\boldsymbol{x}))$ em que $Y \sim \chi^2_1$.
- Assim, rejeita-se H_0, nos três casos.
- Exercício: Seja $X_{ij} \overset{ind.}{\sim} \exp(\theta_i)$, $i = 1,2,3,4$, $j = 1,2,...,n_i$
- Considere as hipóteses: $H_0 : \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{\theta_3}{\theta_2} = \frac{\theta_4}{\theta_3}$ vs H_1 : pelo menos uma igualdade não é valida.

Exercícios

- Construir os três testes vistos, para as hipóteses acima, calculando a função poder e os respectivos p-valores.
- Utilize-os considerando: $\overline{x}_1 = 2$, $\overline{x}_2 = 3,2$, $\overline{x}_3 = 5,1$, $\overline{x}_4 = 6,2$, $n_1 = 10$, $n_2 = 15$, $n_3 = 20$, $n_4 = 25$.
- Exercício: Considere $\boldsymbol{X} \sim \text{tetranomial}(n, p_1, p_2, p_3)$. Queremos testar as hipóteses $H_0 : p_1 = p^2; p_2 = q^2; p_3 = p + q - p^2 - q^2$, $p, q \in [0,1]$. Encontre os três testes anteriores.
- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim \text{beta}(\theta, 1)$ e seja $\widehat{\theta}_n = \frac{\overline{X}_n}{1-\overline{X}_n}$ um estimador de θ. Responda os itens:
  a) Verique se $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} \theta$ (é um estimador fortemente consistente de θ).
  b) Encontre a distribuição assintótica de $\widehat{\theta}_n$.
  c) Proveja um teste assintótico para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

Exercícios

- Teorema: Se g(.) é uma função contínua em α e $\{Y_n\} \xrightarrow[P]{q.c.} \alpha$ $\to \{g(Y_n)\} \xrightarrow[P]{q.c.} g(\alpha)$.

a) Como $\mathcal{E}(X) = \frac{\theta}{\theta+1}$, pela LFGN, temos que $\overline{X}_n \xrightarrow[P]{q.c.} \frac{\theta}{\theta+1}$. Além disso, $\frac{\overline{X}_n}{1-\overline{X}_n}$ é contínua em $\overline{X}_n$ e $P(\overline{X}_n = 1) = 0$, então, pelo teorema anterior, temos que

$$\frac{\overline{X}_n}{1-\overline{X}_n} \xrightarrow[P]{q.c.} \frac{\frac{\theta}{1+\theta}}{1-\frac{\theta}{1+\theta}} = \theta$$

b) Pelo TCL, temos que $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mathcal{E}(\overline{X}_n)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{D} N\left(0, \frac{\theta}{(\theta+1)^2(\theta+2)}\right)$

Exercícios

b) Seja agora, $\widehat{\theta}_n = g(\overline{X}_n)$. Pelo método delta, como g(.) é uma função contínua, temos que:

$$\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\theta)) \xrightarrow[n\to\infty]{D} N\left(0, \sigma^2(\theta)\right)$$

$$g(y) = \frac{y}{1-y}; g'(y) = \frac{1}{(1-y)^2}$$

Assim, $g'(\theta) = \frac{1}{\left(1-\frac{\theta}{1+\theta}\right)^2} = (1+\theta)^2$. Logo

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{D} N\left(0, \frac{\theta(1+\theta)^2}{\theta+2}\right)$$

Exercícios

c) Pelo itens a) e b), usando Slutsky, temos que:

$$T_n = \sqrt{n}\frac{\widehat{\theta}_n - \theta_0}{\sqrt{\frac{\widehat{\theta}(1+\widehat{\theta})^2}{\widehat{\theta}+2}}} \xrightarrow[n\to\infty]{D} N(0,1).$$

Logo, $RC = \left\{t_n^2 \geq q\right\}$, em que $P(Q \geq q) = \alpha$, $Q \sim \chi_1^2$

- Encontre, para o exercício em questão, os testes escore, RV e de Wald.
- Teste de qui-quadrado: Seja $X \sim \text{binomial}(n,p)$ então $\frac{X-np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow[n\to\infty]{D} N(0,1)$, $\frac{(X-np)^2}{npq} \xrightarrow[n\to\infty]{D} \chi_1^2$.

Testes do tipo qui-quadrado

- Sejam, $X_1 \sim \text{binomial}(n, p_1)$ e $X_2 = n - X_1 \sim \text{binomial}(n, p_2)$, $p_1 + p_2 = 1$. Então

$$\frac{(X_2 - np_2)^2}{np_1 p_2} = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2} \xrightarrow[n \to \infty]{D} \chi_1^2$$

  $(X_1, X_2) \sim \text{multinomial}(n, p_1, p_2)$

- Em geral se $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_k) \sim \text{multinomial}(n, \boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, ..., p_k)'$, temos que:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i} \xrightarrow[n \to \infty]{D} \chi_{k-1}^2$$

- Testes de independência: Seja a seguinte tabela de contingência (próximo slide):

		Variável 1 (resposta)					
		C_{11}	C_{12}	...	$C_{1(s-1)}$	C_{1s}	Total
Variável 2	C_{21}	$N_{11}(p_{11})$	$N_{12}(p_{12})$	...	$N_{1(s-1)}(p_{1(s-1)})$	$N_{1s}(p_{1s})$	$N_{1.}$
(resposta)	C_{22}	$N_{21}(p_{21})$	$N_{22}(p_{22})$	...	$N_{1(s-1)}(p_{2(s-1)})$	$N_{2s}(p_{2s})$	$N_{2.}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
	C_{2r}	$N_{r1}(p_{r1})$	$N_{r2}(p_{r2})$	...	$N_{r(s-1)}(p_{r(s-1)})$	$N_{rs}(p_{rs})$	$N_{r.}$
Total	-	$N_{.1}$	$N_{.2}$	$\ldots$	$N_{.(s-1)}$	$N_{.s}$	n

Testes do tipo qui-qaudrado

- p_{ij} : probabilidades conjuntas e $p_{i.}$ e p
- Hipóteses de interesse: $H_0 : p_{ij} = p_{i.}p_{.j}, \forall i, j$ vs $H_1 : p_{ij} \neq p_{i.}p_{.j}$, para pelo menos um i e/ou j.
- EMV: irrestrito $\widehat{p}_{ij} = \frac{N_{ij}}{n}$. Sob $H_0 : \widehat{p}_{ij}^0 = \frac{N_{i.}N_{.j}}{n^2}$.
- Estatística do teste: $Q = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{N_{ij} - n\widehat{p}_{ij}^0}{n\widehat{p}_{ij}^0} \right)^2$.
- Sob H_0 e para $n_{ij}, \forall i, j$ suficientemente grandes, $Q \xrightarrow[n \to \infty]{D} \chi^2_{(r-1)(s-1)}$.
- Obs: note que $(r-1)(s-1) = (rs-1) - [(r-1) + (s-1)]$.
- Para mais testes desse tipo de veja: `http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/Material_ADD_1S_2017.htm`