Testes de hipóteses estatísticas

Prof. Caio Azevedo

Introdução

- Vimos como estimar, pontual e "intervalarmente", parâmetros de interesse (relativos à modelos estatísticos).
- Veremos agora como estabelecer hipóteses estatísticas e testá-las adequadamente.
- O objetivos dos Testes de Hipóteses (Estatísticas) é inferir (testar) algum(s) hipótese(s) de interesse em relação à forma (normal, gama etc) e/ou sobre algum(ns) parâmetro(s) de interesse (média, variância, proporção).
- Neste curso nos focaremos em parâmetros de interesse. Os testes serão feitos com bases em evidências amostrais.
- Hipótese Estatística: É uma conjectura feita com relação à forma e/ou a parâmetro(s) de um modelo estatístico.

Introdução

- Teste de Hipótese Estatística: É uma regra de decisão que nos leva a optar por alguma hipótese estatística (entre as enlecadas). Em geral tal regra é construída com base em alguma Estatística $T = t(\boldsymbol{X})$.
- Basicamente podemos proceder de forma semelhante, ou seja:
  - Tentar obter testes (uniformemente) ótimos em algum sentido.
  - Obter testes através de metodologias gerais (eventualmente, tentando otimizá-los, posteriormente).
- Exemplo: Sabemos que os lotes de parafusos fabricados por americanos e aqueles fabricados por japoneses apresentam as seguintes características, em relação à resistência à tração.

procedência	média	desvio-padrão
americano	145 kg	12 kg
japonês	155 kg	20 kg

Introdução

- Temos um lote de origem desconhecida, que será leiloado. Nosso objetivo é decidir sobre a origem do lote, com base em uma amostra de tamanho n = 25 parafusos.
- Ou seja, queremos testar as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \mu = 155 \text{ e } \sigma = 20 \text{ vs } \; H_1 : \mu = 145 \text{ e } \sigma = 12$$

- A hipótese H_0 é chamada de nula enquanto que a $H_1 (H_A)$ é chamada de hipótese alternativa.
- Implicitamente estamos assumindo que $\Theta = \{\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\theta}_1\}$, em que $\boldsymbol{\theta}_0 = \{155, 20\}$ e $\boldsymbol{\theta}_1 = \{145, 12\}$. Como as hipóteses contem um único ponto do espaço paramétrico, elas são chamadas de hipóteses simples.

Introdução

- Vamos estabelecer a seguinte regra de decisão:
  - Se $\overline{x} > 150$, então o lote será assumido como sendo de origem japonesa, caso contrário, o será como de origem americana
- Obs: Podemos também testar as seguintes hipóteses (não - exaustivas) (considerando apenas um único parâmetro).
  (1) $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$ (*).
  (2) $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ (*).
  (3) $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$ (*).
  (4) $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.
  (5) $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$.
- Em nosso caso, temos que: $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ vs $H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma)'$.
- O conjunto de hipóteses (1) (acima) também pode ser considerado quando $\theta \equiv \boldsymbol{\theta}$ (vetor).

Introdução

- Quando a hipótese (H_0 ou H_1) corresponder à um subconjunto de Θ, contendo mais de um elemento, dizemos se tratar de uma hipótese composta ($\theta > \theta_0$, $\theta \neq \theta_0$, , $\theta \leq \theta_0$,)
- Seja X uma va com fdp $f_X(.;\theta), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$, denotaremos por:
  - Θ_0 : o espaço paramétrico associado à hipótese nula.
  - Θ_1 : o espaço paramétrico associado à hipótese alternativa.
  - $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ vs $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$

Introdução

- No exemplo estamos assumindo que $\Theta_0 = \{155, 20\}$ e $\Theta_1 = \{145, 12\}$ e, que nossa regra de decisão pode ser escrita como:

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \overline{x} \leq 150 \text{ (rejeita-se } H_0) \\ 0, & \text{se } \overline{x} > 150 \text{ (não se rejeita } H_0) \end{cases}$$

- A função acima é chamada de **função teste** para testar H_0

Tipos de erros

- Erro do tipo I: rejeitar H_0, quando H_0 é verdadeira. A probabilidade de se cometer o erro do tipo I é dada por:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}) = P_\theta(\delta(\boldsymbol{X}) = 1), \theta \in \Theta_0 \\
&= P_{\theta_0}(\delta(\boldsymbol{X}) = 1) = P(\overline{X} \leq 150 | \mu = 150, \sigma = 20)
\end{aligned}
$$

- Erro do tipo II: não rejeitar H_0, quando H_0 é falsa. A probabilidade de se cometer o erro do tipo II é dada por:

$$
\begin{aligned}
\beta &= P(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}) = P_\theta(\delta(\boldsymbol{X}) = 0), \theta \in \Theta_1 \\
&= P_{\theta_1}(\delta(\boldsymbol{X}) = 0) = P(\overline{X} > 150 | \mu = 145, \sigma = 12)
\end{aligned}
$$

Mecanismo de teste

- Resumidamente, temos:

realidade	não rejeitar H_0	rejeitar H_0
H_0 é correta	decisão correta	erro do tipo I
H_0 é falsa	erro do tipo II	decisão correta

- Seja X uma va com fdp $f_X(x;\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$ e considere as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ vs } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$$

Mecanismo de teste

- Para testar as hipóteses acima, vamos considerar uma aa de tamanho n de X, denotando por $\mathcal{X}$ o espaço amostral.
- Seja $R \subset \mathcal{X}$, $R : \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} : H_0$ é rejeitada$\}$. Tal conjunto é chamado de região de rejeição ou região crítica. OBS: seu complementar (R^c) é chamada de região de aceitação.
- No exemplo, temos que: $R = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \overline{x} \leq 150\}$

Mecanismo de teste

- Assim, o teste para testar H_0 é dado por:

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \boldsymbol{x} \in R \text{ (região crítica)} \\ 0, & \text{se } \boldsymbol{x} \in R^c \text{ (região de aceitação)} \end{cases}$$

- Note que $\mathcal{X} = R \cup R^c$. Note, ainda, que $\delta(\boldsymbol{X}) \sim \text{Bernoulli}(P_\theta)$, $P_\theta \equiv P_\theta(\boldsymbol{X} \in R)$.
- Def: Seja $\mathcal{S}$ um teste (função teste) para testar as hipóteses $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0$ vs $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$. Definimos a **função poder do teste** como:

$$\psi(\theta) = P_\theta(\text{rejeitar } H_0), \theta \in \Theta(\text{todo o espaço paramétrico})$$

Mecanismo de teste

- Seja $\mathcal{R}$ a região crítica, então:

$$\begin{aligned}\psi(\theta) &= P_\theta(\boldsymbol{X} \in R), \forall \theta \in \Theta \\ &= P_\theta(\delta(\boldsymbol{X}) = 1), \forall \theta \in \Theta\end{aligned}$$

- Essencialmente, um bom teste tem de ter as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}\psi(\theta_0) &= P_\theta(\delta(\boldsymbol{X}) = 1), \forall \theta \in \Theta_0 = \alpha(\theta) \equiv \alpha \approx \text{ pequeno} \\ \psi(\theta_1) &= P_\theta(\delta(\boldsymbol{X}) = 1), \forall \theta \in \Theta_1 = 1 - \beta(\theta) \equiv 1 - \beta \approx \text{ grande}\end{aligned}$$

- Consequentemente, $\beta(\theta) \equiv \beta \approx$ pequeno.

Mecanismo de teste

- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim N(\theta, 100)$ e considere as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \theta \leq 75 \text{ vs } \; H_1 : \theta > 75$$

a) Suponhamos que $n = 25$ e considere a seguinte RC (região crítica): $RC = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n, \overline{x} > 75\}$. Temos que: $\Theta = \mathcal{R}$, $\Theta_0 = (-\infty, 75]$ e $\Theta_1 = (75, \infty)$.

- A função poder é dada por:

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &= P_\theta(\delta(\boldsymbol{X}) = 1) = P(\overline{X} > 75) = P\left(\frac{\overline{X} - \theta}{2} > \frac{75 - \theta}{2}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{75 - \theta}{2}\right), \forall \theta \in \Theta, Z \sim N(0,1) \end{aligned}$$

Mecanismo de teste

- Nesse caso, temos que:

θ	73	75	77	79
$\psi(\theta)$	0,159	0,500	0,841	0,977

b) Suponha agora que: $RC = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n, \overline{x} > 78\}$. Assim, temos que:

$$P\left(Z > \frac{78-\theta}{2}\right)$$

θ	73	75	77	79
$\psi(\theta)$	0,006	0,067	0,308	0,691

Mecanismo de teste

c) Suponha agora que n é desconhecido e queremos construir uma RC (teste), fixando-se valores para a função poder. Sejam: $\psi(73) = 0,023$ e $\psi(77) = 0,977$. Assim

$$P\left(\frac{\overline{X} - 73}{10/\sqrt{n}} > \frac{c - 73}{10/\sqrt{n}}\right) = 0,023 \rightarrow P(Z > c_1) = 0,023$$

$$P\left(\frac{\overline{X} - 77}{10/\sqrt{n}} > \frac{c - 77}{10/\sqrt{n}}\right) = 0,977 \rightarrow P(Z > c_2) = 0,977$$

Mecanismo de teste

cont. c) Assim, temos que:

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \frac{c-73}{10/\sqrt{n}} = 2 \\ \frac{c-77}{10/\sqrt{n}} = -2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} n = 100 \\ c = 75 \end{cases}$$

- Exercício: Construir o gráfico da função poder quando n = 100 (e n = 25) e c = 75.

Cont.

- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 conhecido e as hipóteses: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ e seja a seguinte RC:

$$RC : \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : \frac{\overline{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} > c \right\}, c > 0$$

- Nesse caso, a função poder é dada por:

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &= P_\theta\left(\frac{\overline{X} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} > c\right) = P_\theta\left(\frac{\overline{X} - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} > c + \frac{\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} - \frac{\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= P_\theta\left(Z > c + \frac{\theta_0 - \theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

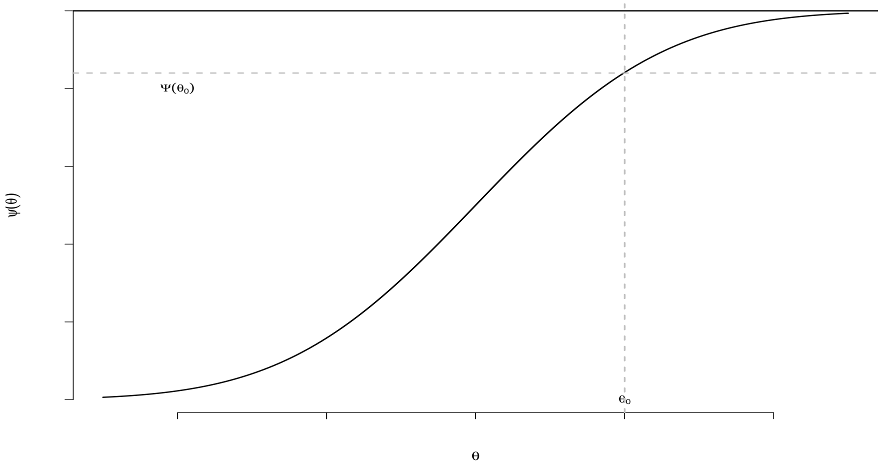
Cont.

- Sejam $\theta_1 < \theta_2$, $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$. Perguntas: $\psi(\theta_1) < \psi(\theta_2)$?, $\psi(\theta_1) > \psi(\theta_2)$?. Note que:

$$\begin{aligned}
\theta_1 < \theta_2 &\rightarrow -\theta_1 > -\theta_2 \rightarrow c + \frac{\theta_0 - \theta_1}{\sigma/\sqrt{n}} > c + \frac{\theta_0 - \theta_2}{\sigma/\sqrt{n}} \\
&\rightarrow P\left(Z > c + \frac{\theta_0 - \theta_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) < P\left(Z > c + \frac{\theta_0 - \theta_2}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&\rightarrow \psi(\theta_1) < \psi(\theta_2)
\end{aligned}$$

- Portanto $\psi(.)$ é crescente. Além disso, $\lim_{\theta \to -\infty} \psi(\theta) = 0$ e $\lim_{\theta \to \infty} \psi(\theta) = 1$. Veja o gráfico a seguir.
- Exercício: Fixados c, θ_0 e σ, encontrar n tal que $\psi(\theta_1) = \gamma$, θ_1 e γ , fixados

Função poder



Cont.

- Def (**Tamanho do teste**): Seja ψ a função poder de um teste para testar $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \in \Theta_1$. O tamanho do teste é definido por:

$$\alpha^* = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(\text{rejeitar } H_0) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(\delta(\boldsymbol{X}) = 1)$$

- Note que $\alpha^* = \sup_{\theta \in \Theta_0} \alpha(\theta)$.
- No exemplo anterior:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \sup_{\theta \in \Theta_0} P\left(\frac{\overline{X} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} > c\right) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P\left(Z > c + \frac{\theta_0 - \theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= P_{\theta_0}(Z > c) \end{aligned}$$

Cont.

- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de X, $X \sim N(\theta, 25)$. Considere as seguintes hipóteses: $H_0 : \theta \leq 17$ vs $H_1 : \theta > 17$.
- A região de rejeição é dada por $RC : \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : \overline{x} > 17 + \frac{5}{\sqrt{n}} \right\}$
- Nesse caso,

$$
\begin{aligned}
\alpha^* &= \sup_{\theta \leq 17} P\left(\overline{X} > 17 + \frac{5}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \sup_{\theta \leq 17} P\left(\frac{\overline{X} - \theta}{5/\sqrt{n}} > \frac{17 + \frac{5}{\sqrt{n}} - \theta}{5/\sqrt{n}}\right) \\
&= \sup_{\theta \leq 17} P\left(Z > \frac{17 - \theta}{5\sqrt{n}} + 1\right) = P(Z > 1) = 0,159
\end{aligned}
$$

Cont.

- OBS: Em geral, para se construir um teste "bom", considera-se $\alpha^* = \alpha$ e procura-se maximizar $\psi(\theta), \forall\theta \in \Theta_1$.
- Exercício: Repetir o exercício anterior, com $H_0 : \theta \leq \theta_0$ e $H_1 : \theta > \theta_0$ e

$$RC : \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^N : \frac{\overline{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} < c \right\}, c < 0.$$

Cont.

- O uso do conceito de **tamanho do teste** apresenta problemas no caso discreto. Isto, em geral, não ocorre para o caso contínuo (devido ao fato da fda ser contínua e, em geral, crescente).
- Por exemplo: seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de X, $X \sim$ Bernoulli(θ), $\theta \in (0,1)$.
- Suponha o interesse em testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ $(\theta_0 < \theta_1)$. Para isso, considere a seguinte RC:

$$RC = \left\{ \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \right\}$$

Cont.

- Admita que desejamos construir um teste de tamanho α^* fixado, isto é:

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \sup_{\theta \in \Theta_0} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq k\right) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \theta^j (1-\theta)^{n-j} \\ &= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \theta_0^j (1-\theta_0)^{n-j}\end{aligned}$$

Cont.

- Suponha agora que $n = 10$ e $H_0 : \theta = 1/4$ vs $H_1 : \theta = 3/4$. Assim, temos que:
  a) Se $\alpha^* = 0,0197, k = 6$.
  b) Se $\alpha^* = 0,0781, k = 5$.
  c) Se $\alpha^* = 0,05$, então não existe a RC.
- Exercício: No exercício da aa da $N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 conhecido, para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, com $RC : \left\{ \boldsymbol{x} \in R^n : \frac{\overline{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} > c \right\}$. Encontre c de forma que que se tenha um teste de tamanho α^*.
- Obs: O valor c é chamado de ponto crítico (separa as regiões de aceitação de rejeição).

Cont.

- $T(\boldsymbol{X}) = \frac{\overline{X}-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ é chamada de estatística do teste.
- Note que $\delta = g(T(\boldsymbol{X}))$.
- Def: Para $\alpha^* \in (0,1)$, $(\alpha = \alpha^*)$ um teste com função poder $\psi(\theta)$ é um teste de nível α se

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \psi(\theta) \leq \alpha$$

Cont.

- No exemplo anterior, o teste de nível $\alpha = 0,05$ é dado por $RC : \left\{ \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \right\}, \; P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq k \right) \leq 0,05$
- OBS: De um modo geral, dada as hipóteses e as suposições define-se:
  a) Uma estatística do teste.
  b) A forma da RC, em função dos pontos críticos $c_1, c_2, ..., c_k$.
  c) Determina-se, com base em 1) e 2), os valores de $c_1, ..., c_k$, para um dado nível de significância (nominal) α.

Cont.

- Teste aleatorizado: Um teste S para testar $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \in \Theta_1$ é dito ser aleatorizado se para pelo menos um $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$, $\exists$ uma probabilidade de se rejeitar ou não H_0.
- Exemplo (da Bernoulli): Seja o seguinte teste:

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 6 \\ \gamma, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} x_i = 5 \\ 0, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} x_i < 5 \end{cases}$$

Cont.

- Se $\delta(\boldsymbol{X}) = 1$ ou se $\delta(\boldsymbol{X}) = 0$, rejeitamos e não rejeitamos H_0, respectivamente. Se $\delta(\boldsymbol{X}) = \gamma$, $\gamma \in (0,1)$, simulamos uma Bernoulli(γ) e rejeitamos H_0 se o valor observado for igual a 1 (sucesso), caso contrário, não rejeitamos.
- Uma das utilidades desse tipo de teste é garantir o nível de significância do teste.

Cont.

- Neste caso, temos que:

$$
\begin{aligned}
\alpha^* &= \alpha(\theta) = \mathcal{E}_\theta(\delta(\boldsymbol{X})) = 1 \times P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 6\right) + \gamma P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = 5\right) \\
&= 0,0197 + \gamma 0,0781 \\
&\rightarrow \alpha^* = 0,05 \rightarrow \gamma = \frac{0,05 - 0,0198}{0,0781} \approx 0,39
\end{aligned}
$$

Cont.

- Def: Um teste S com função poder $\psi(.)$ é dito ser não viciado se:

$$\psi(\theta^{''}) \leq \psi(\theta^{'}), \forall \theta^{''} \in \Theta_0, \theta^{'} \in \Theta_1$$
$$(\alpha(\theta^{''}) \leq \psi(\theta^{'}))$$

- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 conhecido. Sejam as hipóteses: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, $\theta_0 \in \mathcal{R}$ e $RC = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : \frac{\overline{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} > c \right\}$.

Cont.

- Assim, temos que:

$$\psi(\theta) = P\left(Z > c + \frac{\theta_0 - \theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right), \forall\theta \in \Theta \qquad (1)$$

- Logo, como $\psi(.)$ é crescente em θ, $\forall\theta^{''} \in \Theta_0$ e $\theta^{'} \in \Theta_1$, $\theta^{''} < \theta^{'}$, temos que: $\psi(\theta^{''}) \leq \psi(\theta^{'})$.
- Portanto o teste acima é não - viciado.

Cont.

- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, $\sigma = 0,03$ e considere as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Para os testes:

$$\phi_1(\boldsymbol{x}) = S_1(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ se } |\overline{x} - \theta_0| > a \\ 0, \text{cc} \end{cases}$$

$$\phi_2(\boldsymbol{x}) = S_2(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ se } \overline{x} > \theta_0 + b \\ 0, \text{cc} \end{cases}$$

Cont.

- Responda:
  - a) Determine a e b para n$=100$ $\alpha = 0,05$
  - b) Os testes $\phi_1(.)$ e $\phi_2(.)$ são não viciados?
- Para ϕ_1, temos que [a)]:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P_{\theta_0}\left(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}\right) = P_{\theta_0}\left(|\overline{X} - \theta_0| > a\right) \\
&= P_{\theta_0}\left(\frac{|\overline{X} - \theta_0|}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{a}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0,05 \\
&\rightarrow P\left(|Z| > \frac{a}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0,05, Z \sim N(0,1)
\end{aligned}
$$

- Pela Tabela da N(0,1), temos que

$$
\frac{a}{\sigma/\sqrt{n}} = 1,96 \rightarrow a = 0,0588
$$

Cont.

- Por outro lado, temos que [b)]:

$$
\begin{aligned}
& \psi_{\phi_1}(\theta) = P(\text{rejeitar } H_0) = P_\theta(|\overline{X} - \theta_0| > a) \\
= \quad & 1 - P\left(|\overline{X} - \theta_0| \leq a\right) = 1 - [P(\overline{X} - \theta_0 < a) \\
- \quad & P(\overline{X} - \theta_0 < -a)] \\
= \quad & 1 - \left[P\left(Z \leq \frac{\theta_0 - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{a}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - P\left(Z \leq \frac{\theta_0 - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} - \frac{a}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

em que $Z = \frac{\overline{X} - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$.

- Note que:
  - Quando $\theta \to \theta_0 \Rightarrow \psi_{\phi_1}(\theta) = \alpha$.
  - Quando $\theta \to -\infty \Rightarrow \psi_{\phi_1}(\theta) = 1$.
  - Quando $\theta \to \infty \Rightarrow \psi_{\phi_1}(\theta) = 1$.
  - Quando $\theta = \theta_0 + \Delta, \Delta > 0$, temos que $\psi_{\phi_1}(\theta) > \psi_{\phi_1}(\theta_0)$.

Cont.

- Assim, $\psi_{\phi_1}(\theta_0) \leq \psi_{\phi_1}(\theta)$, $\forall \theta \in \Theta_1$ $(\theta_0 \in \Theta_0)$. Portanto, ϕ_1 é um teste não viciado.
- Para ϕ_2, temos que [a)]

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}) = P(\overline{X} > \theta_0 + b) \\
&= P\left(\frac{\overline{X} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{b}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0,05 \\
&\rightarrow P\left(Z > \frac{b}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0,05, Z \sim N(0,1)
\end{aligned}
$$

- Nesse caso,

$$
\frac{b}{\sigma/\sqrt{n}} = 1,64 \rightarrow b = 0,0492
$$

Cont.

b) Temos que:

$$
\begin{aligned}
\psi_{\phi_2}(\theta) &= P\left(\overline{X} > \theta_0 + b\right) = P\left(\frac{\overline{X} - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\theta_0 - \theta + b}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(Z > \frac{\theta_0 - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{b}{\sigma/\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}
$$

- Podemos perceber que $\psi(.)$ é crescente (em θ) e, assim, $\exists\ \theta \in \Theta_1$, $\psi_{\phi_2}(\theta) > \psi_{\phi_2}(\theta), (\forall \theta \in \theta_0)$
- Portanto, o teste ϕ_2 é viciado.

Teste Uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Seja $\mathcal{C}$ a classe dos testes para testar $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \in \Theta_1$.
- Um teste ϕ na classe $\mathcal{C}$ com função poder ψ_ϕ é uniformemente mais podereoso (UMP) se $\psi_\phi(\theta) \geq \psi'(\theta)$, $\theta \in \Theta_1 = \Theta_0^c$ e para $\psi'(.)$ sendo a função poder de qualquer outro teste em $\mathcal{C}$.
- Nos focaremos na classe $\mathcal{C}$ dos testes com tamanho (ou nível) α.
- Seja ϕ um teste. Denotaremos por ψ_ϕ o poder desse teste. Assim, estamos interessados no teste ϕ, tal que

$$\psi_\phi(\theta) \geq \psi_\eta(\theta), \forall \theta \in \Theta_1, \forall \eta \in \mathcal{C}$$

Teste Uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- OBS:
  a) Se $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$, o teste ϕ que satisfaz a condição acima é dito ser mais poderoso (MP) ou seja:

$$\psi_\phi(\theta_1) \geq \psi_\eta(\theta_1), \forall \eta \in \mathcal{C}$$

  b) Se R é a região crítica associada a função de teste $\phi(.)$, então dizemos que R é a "melhor região crítica" para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ se, $\forall$ região crítica A,

$$P(\boldsymbol{X} \in R|\theta = \theta_1) \geq P(\boldsymbol{X} \in A|\theta = \theta_1) \therefore \psi_R(\theta_1) \geq \psi_A(\theta_1)$$

- No caso geral em que $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \in \Theta_1$, temos que

$$\psi_R(\theta) = P_\theta(\boldsymbol{X} \in R) \geq \psi_A(\theta) = P_\theta(\boldsymbol{X} \in A), \forall \theta \in \Theta_1$$

Teste mais Poderoso (Teste MP)

- Teorema (Lema de Neyman-Pearson): Considere as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ e o teste com RC R, que satisfaz as seguintes condições:

  C_1 :

  $$\delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{x} \in R, \text{se } f(\boldsymbol{x}|\theta_1) > kf(\boldsymbol{x}|\theta_0) \\ \boldsymbol{x} \notin R, \text{se } f(\boldsymbol{x}|\theta_1) < kf(\boldsymbol{x}|\theta_0) \end{cases}$$

  para algum k positivo.

  C_2 : $\alpha = P_{\theta_0}(\boldsymbol{X} \in R)$

- Então:

  a) Qualquer teste satisfazendo C_1 e C_2 é um teste MP de nível α.

  b) Se $\exists$ um teste MP que satisfaz as condições C_1 e C_2, então, qualquer teste MP de nível α, é de tamanho α e qualquer teste MP de nível α satisfaz C_1.

Teste mais Poderoso (Teste MP)

- Prova: caso contínuo:

  a) Suficiência: note que o teste de tamanho α que satisfaz C_2 é de nível α, pois $\sup_{\theta \in \Theta_0} \psi(\theta) = P_{\theta_0}(\boldsymbol{X} \in R) = \alpha$.

  - Seja ϕ o teste satisfazendo as condições C_1 e C_2 e seja ϕ' outro teste de nível a α.
  - Se ψ e ψ' são as funções poder de ϕ e ϕ', respectivamente; de C_1, segue que:

$$\Delta(\boldsymbol{x}) = (\phi(\boldsymbol{x}) - \phi'(\boldsymbol{x}))(f(\boldsymbol{x}|\theta_1) - kf(\boldsymbol{x}|\theta_0)) > 0, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}(*)$$

  (exercício)

  - Assim, temos que

$$0 \leq \int \Delta(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \psi(\theta_1) - \psi'(\theta_1) - k(\psi(\theta_0) - \psi'(\theta_0))(*)$$

Teste mais Poderoso (Teste MP)

a) cont.

- Como ϕ' é um teste de nível α, $\psi'(\theta_0) \leq \alpha$ e $\alpha - \psi'(\theta_0) \geq 0 \rightarrow \psi(\theta_0) - \psi'(\theta_0) \geq 0$. (exercício)
- Assim, como $k > 0$ e de (*), temos que:

$$0 \leq \Delta(\boldsymbol{x}) \leq \psi(\theta_1) - \psi'(\theta_1) \rightarrow \psi(\theta_1) \geq \psi'(\theta_1)$$

Ou seja, ϕ é MP do que ϕ'.

b) Seja ϕ' um teste MP de nível α. De a), ϕ um teste MP que satisfaz C_1 e C_2, assim

$$\begin{aligned} \psi(\theta_1) &\geq \psi'(\theta_1) \\ \psi(\theta_1) &\leq \psi'(\theta_1) \\ \psi(\theta_1) &= \psi'(\theta_1)(**) \end{aligned}$$

Teste mais Poderoso (Teste MP)

b) cont.

- Agora de (*) e (**), $k > 0$, temos que: $\psi(\theta_0) - \psi'(\theta_0) \leq 0$, que implica que

$$\alpha - \psi'(\theta_0) \leq 0 \rightarrow \alpha \leq \psi'(\theta_0) \tag{2}$$

- Por outro lado, sabemos que ϕ' é um teste de nível α, ou seja:

$$\psi'(\theta_0) \leq \alpha \tag{3}$$

- Portanto, $\psi'(\theta_0) = \alpha$ de (2) e (3).

Teste mais Poderoso (Teste MP)

b) cont.

- Como $\Delta(\boldsymbol{x}) \geq 0$ (pela equivalência de de $\psi(.)$ e $\psi'(.)$), temos que:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int \Delta(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \psi(\theta_1) - \psi'(\theta_1) - k(\psi(\theta_0) - \psi'(\theta_0)) = 0 \\
&\rightarrow \Delta(\boldsymbol{x}) = 0 \rightarrow (\phi(\boldsymbol{x}) - \phi'(\boldsymbol{x}))(f(\boldsymbol{x}|\theta_1) - kf(\boldsymbol{x}|\theta_0)) = \Delta(\boldsymbol{x}) = 0 \\
&\rightarrow (\phi(\boldsymbol{x}) - \phi'(\boldsymbol{x}))(f(\boldsymbol{x}|\theta_1) - kf(\boldsymbol{x}|\theta_0)) = 0
\end{aligned}
$$

- Se $\phi(\boldsymbol{x}) = 1 \rightarrow f(\boldsymbol{x}|\theta_1) > kf(\boldsymbol{x}|\theta_0) \rightarrow 1 - \phi'(\boldsymbol{x}) = 0, \rightarrow \phi'(\boldsymbol{x}) = 1.$
- Se $\phi(\boldsymbol{x}) = 0 \rightarrow f(\boldsymbol{x}|\theta_1) < kf(\boldsymbol{x}|\theta_0), \rightarrow -\phi'(\boldsymbol{x}) = 0 \rightarrow \phi'(\boldsymbol{x}) = 0.$
- Ou seja $\phi = \phi'$.
- Portanto ϕ' satisfaz a C_1.

Teste mais Poderoso (Teste MP)

- Para o caso discreto, o TMP converte-se em:

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{se } f(\boldsymbol{x}|\theta_1) > kf(\boldsymbol{x}|\theta_0) \\ \gamma, \text{se } f(\boldsymbol{x}|\theta_1) = kf(\boldsymbol{x}|\theta_0) \\ 0, \text{se } f(\boldsymbol{x}|\theta_1) < kf(\boldsymbol{x}|\theta_0) \end{cases}$$

  para algum k positivo.
- $\alpha = P_{\theta_0}(\boldsymbol{X} \in R) = \mathcal{E}_{\theta_0}(\delta(\boldsymbol{X}))$

Teste mais Poderoso (Teste MP)

- Exercício: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim \exp(\theta)$ e $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$, $\theta_1 > \theta_0$, encontre o MP para testar as hipóteses em questão. Temos que

$$\frac{f(\boldsymbol{x};\theta_1)}{f(\boldsymbol{x};\theta_0)} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n \exp\left\{-\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_0}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$$

Teste mais Poderoso (Teste MP)

- (cont.) Assim:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(\boldsymbol{x};\theta_1)}{f(\boldsymbol{x};\theta_0)} &> k \leftrightarrow \exp\left\{-\left(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_0}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i\right\} > \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n k \\
&\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i > \left[-\left(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_0}\right)\right]^{-1} \ln\left[\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n k\right] \\
&\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i > k^* = k^*(\alpha)
\end{aligned}
$$

- Em que k^* é obtido através de $\alpha = P_{\theta_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i > k^*)$.

Teste mais Poderoso (Teste MP)

- Assim, pelo LNP um teste MP, de nível α é dado por

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} x_i > k^* \\ 0, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} x_i < k^* \end{cases}$$

$\alpha = P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > k^*\right)$

- Note que $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{gama}(n, \theta)$. Além disso, sob H_0 temos que $W = \frac{2Y}{\theta_0} \sim \chi^2_{2n}$.
- Portanto, para encontrar k^*, podemos utilizar a seguinte relação:

$$\alpha = P_{\theta_0}\left(\frac{2Y}{\theta_0} > \frac{2k^*}{\theta_0}\right) = P\left(W > k^{**}\right)$$

- Assim, podemos utilizar a distribuição de χ^2_{2n} para encontrar k^* ou k^{**}.

Teste mais Poderoso (Teste MP)

- Corolário (LNP): Considere as hipóteses simples (do LNP). Seja $T = t(\boldsymbol{X})$ uma estatística suficiente para θ e $g_T(.;\theta)$ a fdp de T.
- Então, qualquer teste baseado em T com RC S é MP de nível α se satisfaz:

$$C_1 : \begin{cases} t \in S, & \text{se } g_T(t;\theta_1) > k g_T(t;\theta_0) \\ t \notin S, & \text{se } g_T(t;\theta_1) < k g_T(t;\theta_0) \end{cases}$$

e

$$C_2 : \alpha = P_{\theta_0}(T \in S) = P_{\theta_0}(t(\boldsymbol{X}) \in S).$$

Teste mais Poderoso (Teste MP)

- Dem: Em termos de $\boldsymbol{X}$ o teste baseado na estatística T tem RC $R = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : t(\boldsymbol{x}) \in S\}$.
- Por outro lado, como T é suficiente, $f(\boldsymbol{x};\theta_i) = h(\boldsymbol{x})g(t(\boldsymbol{x});\theta_i)$, $i = 1, 2$.
- Para $t \in S$, temos que:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_1) > kf_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_0) \rightarrow g_T(t(\boldsymbol{x});\theta_1) > kg_T(t(\boldsymbol{x});\theta_0)$$

Teste mais Poderoso (Teste MP)

- (cont.) Analogamente, para $t \notin S$, podemos verificar que:

$$g_T(t(\boldsymbol{x});\theta_1) < kg_T(t(\boldsymbol{x});\theta_0)$$

- Por outro lado, pelo LNP, $\exists$ um teste MP de nível α,

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, \text{se } g_T(t;\theta_1) > kg_T(t;\theta_0) \\ 0, \text{se } g_T(t;\theta_1) < kg_T(t;\theta_0) \end{cases}$$

e $\alpha = P_{\theta_0}(T \in S)$.

Teste mais Poderoso (Teste MP)

- No caso discreto, temos que:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, \text{se } g(t:\theta_1) > kg(t:\theta_0) \\ \gamma, \text{se } g(t:\theta_1) = kg(t:\theta_0) \\ 0, \text{se } g(t:\theta_1) < kg(t:\theta_0) \end{cases}$$

  e $\alpha = \mathcal{E}_{\theta_0}(\phi(T))$.

- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim$ Bernoulli(θ). Considere as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$, $\theta_1 > \theta_0$. Encontre o TMP.

Teste mais Poderoso (Teste MP)

- (cont.) Note que

$$\frac{f(\boldsymbol{x};\theta_1)}{f(\boldsymbol{x};\theta_0)} > k \quad \rightarrow \quad \frac{\theta_1^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta_1)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}}{\theta_0^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-\theta_0)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}} > k$$

$$\rightarrow \quad \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^n x_i} > \left[\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right]^n k$$

- Como $\theta_1 > \theta_0 \rightarrow \left[\frac{\theta_1}{\theta_0}\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right] > 1$ (exercício), temos que

$$\sum_{i=1}^n x_i > \frac{\ln\left[\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^n k\right]}{\ln\left[\frac{\theta_1}{\theta_0}\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right]} = k^*$$

Teste mais Poderoso (Teste MP)

- (cont.) Portanto, pelo LNP, o teste MP é dado por

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{se } \sum_{i=1}^{n} x_i > k^* \\ \gamma, \text{se } \sum_{i=1}^{n} x_i = k^* \\ 0, \text{se } \sum_{i=1}^{n} x_i < k^* \end{cases}$$

e $\alpha = P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > k^*\right) + \gamma P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k^*\right)$ é o teste MP de nível α. Sob H_0, $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{binomial}(n, \theta_0)$.

Teste mais Poderoso (Teste MP)

- Utilizando o corolário, teríamos:

$$\frac{g_T(t;\theta_1)}{g_T(t;\theta_0)} > k \rightarrow \frac{\binom{n}{t}\theta_1^t(1-\theta_1)^{n-t}}{\binom{n}{t}\theta_0^t(1-\theta_0)^{n-t}} > k$$

$$\rightarrow \quad \left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^t > \left[\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right]^n k \rightarrow t > k^* \rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i > k^*$$

- Assim, o teste MP de nível α é dado por:

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{se } \ t > k^* \\ \gamma, \text{se } \ \sum_{i=1}^{n} x_i = k^* \\ 0, \text{se } \ t < k^* \end{cases}$$

em que $\alpha = P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > k^*\right) + \gamma P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k^*\right)$. Sob H_0, $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{binomial}(n, \theta_0)$.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Corolário: Considere as hipóteses $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \in \Theta_0^c$ e um teste que satisfaz as seguintes condições:
  1) O teste é de nível α.
  2) $\exists\ \theta_0 \in \Theta_0$, tal que $P_{\theta_0}(\boldsymbol{X} \in R) = \alpha$.
  3) Para $\theta_0 \in \Theta_0$, dado em 2) e para cada $\theta' \in \Theta_1$, $\exists$ k' tal que:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{x} \in R, \text{se } f(\boldsymbol{x};\theta') > k' f(\boldsymbol{x};\theta_0) \\ \boldsymbol{x} \notin R, \text{se } f(\boldsymbol{x};\theta') < k' f(\boldsymbol{x};\theta_0) \end{cases}$$

Então, o teste acima é UMP de nível α, para testar H_0 vs H_1.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- (cont.) Obs 1) : o resultado também vale se (caso discreto):

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{se } f(\boldsymbol{x};\theta') > k' f(\boldsymbol{x};\theta_0) \\ \gamma, \text{se } f(\boldsymbol{x};\theta') = k' f(\boldsymbol{x};\theta_0) \\ 0, \text{se } f(\boldsymbol{x};\theta') < k' f(\boldsymbol{x};\theta_0) \end{cases}$$

  com $\alpha = \mathcal{E}_{\theta_0}(\phi(\boldsymbol{X}))$.

- Obs 2) : O resultado acima também é válido, com as devidas modificações, se $\exists$ uma estatística suficiente $T = t(\boldsymbol{X})$.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim \exp(\theta)$ e considere as seguintes hipóteses: $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, $\exists$ um teste UMP?

a) Definamos: $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta'$, $\theta' > \theta_0$.

- Para as hipóteses simples, vimos que a

$$RC = \left\{ \boldsymbol{x} \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i > k^* \right\}, k^* = -\left(\frac{1}{\theta'} - \frac{1}{\theta_0} \right)^{-1} \ln \left[\left(\frac{\theta'}{\theta_0} \right)^n k \right]$$

é ótima no sentido de levar à um teste MP de nível α, $\alpha = P(Y > k^*) = P(W > k^{**})$, $Y \sim \text{gama}(n, \theta)$ e $W \sim \chi^2_{2n}$.

- Como θ' foi escolhido arbitrariamente, (não influencia a forma do teste), pelos resultados anteriores, temos que esse teste é UMP.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Obs: No exemplo acima, se as hipóteses H_0 e H_1 fossem $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, então o procedimento, para a obtenção do teste UMP é considerar as hipóteses simples:

$$H_0 : \theta = \theta_0' \text{ vs } H_1 : \theta = \theta', \theta_0' \leq \theta_0 \text{ e } \theta' > \theta_0$$

b) $\theta_0 \in \Theta_0$, $P_{\theta_0}(t(\boldsymbol{X}) \in S) = \alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \alpha(\theta)$. A região crítica é dada por: $R = \left\{\boldsymbol{x} \in R^n : t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i > k^*\right\}$ e a função poder ao teste é dada por:

$$\psi(\theta) = P_\theta(t(\boldsymbol{X}) > k^*) = P_\theta\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > k^*\right)$$

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Exemplo: Seja $X_i \overset{iid}{\sim} \exp(\theta)$ e considere as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$; $\exists$ TUMP?
- Consideraremos as seguintes hipóteses:
  a) $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta'$, $\theta' > \theta_0$.
  b) $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta''$, $\theta'' < \theta_0$.
- Temos que: em a) a RC é dada por

$$RC = \left\{ \boldsymbol{x} \in (\mathcal{R}^{+})^{n} : \sum_{i=1}^{n} x_i > k^{*} \right\}.$$

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Em b), temos que:

$$\left[-\left(\frac{1}{\theta''}-\frac{1}{\theta_0}\right)\right]\sum_{i=1}^{n}x_i > \ln\left[\left(\frac{\theta''}{\theta_0}\right)^n k\right]$$

$$\rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}x_i < \left[-\left(\frac{1}{\theta''}-\frac{1}{\theta_0}\right)\right]^{-1}\ln\left[\left(\frac{\theta''}{\theta_0}\right)^n k\right]$$

  Logo nesse caso, $RC = \left\{\boldsymbol{x} \in (\mathcal{R}^+)^n, \sum_{i=1}^{n} x_i < k^{**}\right\}$.

- Portanto como a RC não é, necessariamente (as regiões são conflitantes), a mesma $\forall\theta^{''} \in \Theta_1$, então $\nexists$ teste UMP para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Exercício: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim U(0, \theta), \theta > 0$. Mostre que:

$$\phi_1(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } y_n > \theta_0 \\ \alpha, & \text{se } y_n \leq \theta_0 \end{cases}$$

é um teste UMP de tamanho α, para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$. Além disso, mostre que:

$$\phi_1(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } y_n > \theta_0 \text{ ou } y_n \leq \theta_0 \alpha^{1/n} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é um teste UMP de tamanho α para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Def: Uma família de fdp's $\{f_{\boldsymbol{X}}(.;\theta), \theta \in \Theta\}, \Theta \in \mathcal{R}$ é dita ter razão de verossimilhança monótona (RVM) se $\exists$ uma estatística $T = t(\boldsymbol{X}), \forall, \theta_2 > \theta_1, \frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_2)}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_1)}$ é uma função monótona (não decrescente ou não crescente) em $t(\boldsymbol{x})$ para

$$\boldsymbol{x} \in \{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_1) > 0 \text{ ou } f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_2) > 0\} \left(f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_1) \neq f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_2)\right)$$

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim \exp(\theta)$; $\boldsymbol{X}$ tem RVM? Note que

$$\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_2)}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_1)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^n \exp\left\{\left[-\left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}\right)\right]\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$$

- Podemos notar que a função acima é monótona não decrescente em $t = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Logo, $\boldsymbol{X}$ tem RVM não decrescente em $t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.
- Analogamente, $\boldsymbol{X}$ tem RVM não crescente em $t^* = -\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Exemplo: Suponha que X tem fdp dada por:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\mu) = \frac{\binom{\mu}{x}\binom{N-\mu}{n-x}}{\binom{N}{n}} \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,\min(n,\mu)\}}(x)$$

- A distribuição de X tem RVM?
- Seja $\mu_2 = \mu_1 + 1 > \mu_1$ e $g(x) = \frac{f(x,\mu_1+1)}{f(x,\mu_1)}$.
- Se $x < x' \rightarrow g(x) \overset{?}{<} g(x')$. Temos que:

$$g(x) = \frac{\mu}{\mu + 1 - x} \frac{N - \mu - n + x}{N - \mu} \text{(provar)}$$

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Note que:

$$
\begin{aligned}
g(x) &< g(x') \leftrightarrow \frac{\mu}{\mu+1-x}\frac{N-\mu-n+x}{N-\mu} \\
&< \frac{\mu}{\mu+1-x'}\frac{N-\mu-n+n'}{N-\mu} \\
&\leftrightarrow -(N-n+1)x < -(N-n+1)x' \leftrightarrow x' > x
\end{aligned}
$$

- Assim, X tem RVM não decrescente em $t(x) = x$.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ aa de $X \sim U(0,\theta)$. Note que

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) = \frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{(0,y_n)}(y_1)\mathbb{1}_{(0,\theta)}(y_n)$$

- Assim, se $\theta_1 < \theta_2$, temos que:

$$\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_2)}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_1)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^n \frac{\mathbb{1}_{(0,\theta_2)}(y_n)}{\mathbb{1}_{(0,\theta_1)}(y_n)}$$

- Portanto, note que:

$$g(y_n) = \begin{cases} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^n, \text{ se } 0 < y_n < \theta_1 \\ \infty, \text{ se } \theta_1 \leq y_n < \theta_2 \end{cases}$$

- Logo, $\boldsymbol{X}$ tem RVM não decrescente em y_n.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Teorema: Suponha que a distribuição de $\boldsymbol{X}$ tem fdp dada por $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) = \exp\{c(\theta)t(\boldsymbol{x}) + d(\theta)\}\, h(\boldsymbol{x})$, $\theta \in \mathcal{R}$ e $c(.)$ é não decrescente em θ. Então, $\boldsymbol{X}$ tem RVM **não decrescente** em $t(\boldsymbol{x})$.
- Note que se $\theta_1 < \theta_2 \rightarrow c(\theta_1) \leq c(\theta_2) \rightarrow c(\theta_2) - c(\theta_1) \geq 0$. Assim, temos que:

$$\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_2)}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_1)} = \exp\{[c(\theta_2) - c(\theta_1)]t(\boldsymbol{x}) + d(\theta_2) - d(\theta_1)\}$$

- Portanto, $\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_2)}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_1)}$ é não decrescente em $t(\boldsymbol{x})$.
- Obs: Se $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) = \exp\{c(\theta)t(\boldsymbol{x}) + d(\theta)\}\, h(\boldsymbol{x}), \theta \in \mathcal{R}$ e $c(.)$ é não crescente em θ, então $\boldsymbol{X}$ tem RVM **não crescente** em $t(\boldsymbol{x})$.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Observação: Suponha que a função teste ϕ depende de uma estatística suficiente e completa $t(\boldsymbol{X})$, isto é, $\phi(\boldsymbol{x}) = g(t(\boldsymbol{x}))$. Se ϕ é um teste UMP de tamanho α para testar $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \in \Theta_1$, então ele é único.
- Dem: Seja ϕ^* um outro teste UMP de tamanho α, $\phi^*(\boldsymbol{x}) = f(t(\boldsymbol{x}))$. Assim, temos que:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \mathcal{E}_\theta(\phi(\boldsymbol{X})) = \mathcal{E}_\theta(\phi^*(\boldsymbol{X})), \forall \theta \in \Theta_0 \\
&\rightarrow \mathcal{E}_\theta(\phi(\boldsymbol{X}) - \phi^*(\boldsymbol{X})) = 0 \\
&\rightarrow \mathcal{E}_\theta(g(t(\boldsymbol{X})) - f(t(\boldsymbol{X}))) = 0 \rightarrow \mathcal{E}_\theta(h(t(\boldsymbol{X}))) = 0
\end{aligned}
$$

- Como T é completa, $h(t) \equiv 0$, $\forall t \in B$. Assim, $g(t) = f(t)$, $\forall t \in B$, $\rightarrow \phi \equiv \phi^* \equiv \phi$, $\rightarrow \phi(\boldsymbol{x}) \equiv \phi^*(\boldsymbol{x})$, $\forall\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Exemplo: Seja $X \sim \text{Cauchy}(\theta, 1)$, $\theta \in \mathcal{R} = \Theta$. A distribuição de X tem RVM? Seja $\theta_2 > \theta_1$ e

$$g(x) = \frac{f(x;\theta_2)}{f(x;\theta_1)} = \frac{\frac{1}{\pi[1+(x-\theta_2)^2]}}{\frac{1}{\pi[1+(x-\theta_1)^2]}} = \frac{1+(x-\theta_2)^2}{1+(x-\theta_1)^2}$$

- Note que, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 1$. Logo $g(x)$ não tem comportamento monótono nem não crescente e não decrescente. Logo $\boldsymbol{X}$ não tem RVM.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Teorema: Suponha que a distribuição de $\boldsymbol{X}$ tem RVM não decrescente em $t(\boldsymbol{x})$. Para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, o teste da forma:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) > c \\ 0, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) < c \end{cases}$$

ou

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) > c \\ \gamma & \text{se se } t(\boldsymbol{x}) = c \\ 0, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) < c \end{cases}$$

em que $\alpha = \mathcal{E}_{\theta_0}(\phi(\boldsymbol{X}))$ (em ambos os casos) é UMP de nível α.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

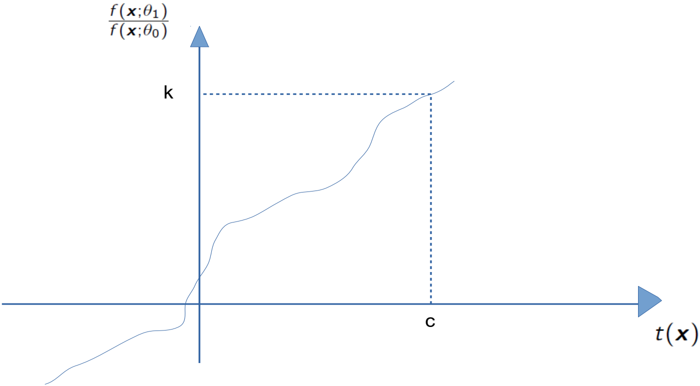
- Dem: Considere as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$, $\theta_1 > \theta_0$, θ_1 fixo. Então, pelo LNP, o teste:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ se } \frac{f(\boldsymbol{x};\theta_1)}{f(\boldsymbol{x};\theta_0)} > k \\ 0, \text{ se } \frac{f(\boldsymbol{x};\theta_1)}{f(\boldsymbol{x};\theta_0)} < k \end{cases}$$

  é MP de nível α, $\alpha = P_{\theta_0}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{R})$.

- Como a distribuição de $\boldsymbol{X}$ tem RVM não decrescente em $t(\boldsymbol{x})$, então $\frac{f(\boldsymbol{x};\theta_1)}{f(\boldsymbol{x};\theta_0)}$ é não decrescente em $t(\boldsymbol{x})$. Logo (graficamente, próximo slide):

Teste UMP e RVM



Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Portanto, o teste $\phi(.)$ é equivalente à

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) > c \\ 0, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) < c \end{cases}$$

  em que $\alpha = P_{\theta_0}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{R}) = P_{\theta_0}(t(\boldsymbol{X}) > c)$, como θ_1 foi escolhido arbitrariamente o resultado segue.

- Raciocínio análogo pode ser aplicado à um teste aleatorizado.
- Obs: O resultado também vale se as hipóteses forem: $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$. Nesse caso, $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_{\theta}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{R})$.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- OBS: Sejam as hipóteses do teorema anterior, suponha que $\boldsymbol{X}$ tem RVM não crescente em $t(\boldsymbol{x})$ e $\exists$ θ_0 tal que $\alpha = P_{\theta_0}(\boldsymbol{X} \in \mathcal{R})$, $\theta_0 \in \Theta_0$. Então o teste:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) < c \\ 0, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) > c \end{cases}$$

e

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) < c \\ \gamma, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) = c \\ 0, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) > c \end{cases}$$

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- (cont.) é UMP de nível α para testar $H_0 : \theta = \theta_0 (\theta \leq \theta_0)$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.
- Dem: Exercício (análogo ao caso anterior).
- Exercício: Seja X com distribuição hipergeométrica com fdp dada no exercício anterior. Considere as hipóteses $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$ $\exists$ um teste UMP?
- Vimos que X tem RVM não decrescente em X. Pelo LNP, temos que

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > c \\ \gamma, \text{se } x = c \\ 0, \text{ se } x < c \end{cases}$$

em que $\alpha = \mathcal{E}_{\mu_0}(\phi(\boldsymbol{X}))$, é um teste UMP.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Teorema: Suponha que $\boldsymbol{X}$ tem RVM não decrescente em $t(\boldsymbol{x})$. Para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0 (\theta = \theta_0)$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, qualquer teste da forma:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ se } t(\boldsymbol{x}) > c \\ \gamma, \text{se } t(\boldsymbol{x}) = c \\ 0, \text{ se } t(\boldsymbol{x}) < c \end{cases}$$

tem função poder não decrescente em θ.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Exercício: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim$ lognormal(μ, σ^2).
  a) Prove que $f_{\boldsymbol{X}}(.;\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)$ pertence à família exponencial (completa).
  b) Obtenha os EMM e o EMV de $\boldsymbol{\theta}$.
  c) Para σ^2 conhecido, obtenha as esperanças e variâncias do EMM e do EMV de μ?
  d) Para σ^2 conhecido, $\exists$ um teste UMP de tamanho α para testar $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$?

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Observação: Sejam as hipóteses $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$. Então se a distribuição de $\boldsymbol{X}$ tem RVM não decrescente (não crescente) tem $t(\boldsymbol{x})$ então:

  Não decrescente

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ se } t(\boldsymbol{x}) < c \\ \gamma, \text{se } t(\boldsymbol{x}) = c \\ 0, \text{ se } t(\boldsymbol{x}) > c \end{cases}$$

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- (cont.) e
  Não crescente

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ se } t(\boldsymbol{x}) > c \\ \gamma, \text{se } t(\boldsymbol{x}) = c \\ 0, \text{ se } t(\boldsymbol{x}) < c \end{cases}$$

  em que $\alpha = \mathcal{E}_{\theta_0}(\phi(\boldsymbol{X}))$ e c é obtido dessa relação são testes UMP, respectivamente.
- Prova: Exercício - considerar $H_0 : \theta = \theta_0'$ vs $H_1 : \theta = \theta'$ ($\theta_0' \geq \theta_0$, $\theta' < \theta_0$)

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim \text{Poisson}(\theta)$. Determine, se existir, um teste UMP para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$.
- Note que

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}; \theta) &= \exp\left\{\ln(\theta)\sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta\right\} h(\boldsymbol{x}) \\
&= \exp\left\{c(\theta)t(\boldsymbol{x}) - d(\theta)\right\} h(\boldsymbol{x}),
\end{aligned}
$$

como $c(\theta) = \ln(\theta)$ é crescente em θ e $\boldsymbol{X} \in FE_1(\theta)$, temos que a distribuição de $\boldsymbol{X}$ tem RVM não decrescente em $t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- (cont.) logo, um teste UMP é dado por:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, \text{ se } t < c \\ \gamma, \text{se } t = c \\ 0, \text{ se } t > c \end{cases}$$

em que $\alpha = \mathcal{E}_{\theta_0}(\phi(\boldsymbol{X})) = P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < c\right) + \gamma P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = c\right)$

- Em particular, se $\alpha = 0,05$, $\theta_0 = 2$, $n = 7$, $c = 8$, temos que: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Poisson}(n\theta)$ e $P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < 8\right) = 0,032$ e $P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = 8\right) = 0,030$. Assim

$$\gamma = \frac{0,05 - 0,032}{0,030} = 0,61.$$

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Exemplo: Seja X uma va tal que:

$$f(x;\theta) = \frac{e^{-x-\theta}}{[1+e^{-x-\theta}]^2}\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x)$$

- Existe um teste UMP para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$? Seja $\theta_1 < \theta_2$ e $g(x) = \frac{f(x;\theta_2)}{f(x;\theta_1)}$.
- Se $x < x' \overset{?}{\to} g(x) < g(x')$.
- Note que, se

$$x < x' \to -x > -x' \to e^{-x} > e^{-x'} \quad (4)$$

$$\theta_1 < \theta_2 \to -\theta_1 > -\theta_2 \to e^{-\theta_1} > e^{-\theta_2} \quad (5)$$

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- De (4) e (5), temos que:

$$e^{-x}(e^{-\theta_1} - e^{-\theta_2}) > e^{-x'}(e^{-\theta_1} - e^{-\theta_2})$$

- Por outro lado,

$$g(x) = \frac{e^{-x-\theta_2}/[(1+e^{-x-\theta_2})^2]}{e^{-x-\theta_1}/[(1+e^{-x-\theta_1})^2]} = e^{-(\theta_2-\theta_1)}\left(\frac{1+e^{-x-\theta_1}}{1+e^{-x-\theta_2}}\right)^2$$

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- (cont.) Além disso

$$
\begin{aligned}
g(x) &< g(x') \leftrightarrow e^{-(\theta_2-\theta_1)}\left(\frac{1+e^{-x-\theta_1}}{1+e^{-x-\theta_2}}\right)^2 < e^{-(\theta_2-\theta_1)}\left(\frac{1+e^{-x'-\theta_1}}{1+e^{-x'-\theta_2}}\right)^2 \\
&\leftrightarrow (1+e^{-x-\theta_1})(1+e^{-x'-\theta_2}) < (1+e^{-x-\theta_2})(1+e^{-x'-\theta_1}) \\
&\leftrightarrow e^{-x'-\theta_2} + e^{-x-\theta_1} < e^{-x'-\theta_1} + e^{-x-\theta_2} \\
&\leftrightarrow e^{-x'}[e^{-\theta_2} - e^{-\theta_1}] < e^{-x}[e^{-\theta_2} - e^{-\theta_1}] \\
&\leftrightarrow e^{-x'} > e^{-x} \leftrightarrow x' < x
\end{aligned}
$$

- Logo, X tem *RVM* não crescente em X. Assim, temos que

$$
\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < c \\ 0, & \text{se } x > c \end{cases}
$$

em que $\alpha = P_{\theta_0}(X < c)$ é um teste de UMP de nível α.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Exercício: Seja $X_1, ...X_n$ aa de $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 conhecido, $\exists$ um teste UMP para testar: $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0, (\theta < \theta_0)$
- Exemplo (exercício anterior): Sejam $\theta_2 < \theta_1$. Note que:

$$\begin{aligned}
\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_2)}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_1)} &= \frac{\exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \theta_2)^2\right]\right\}}{\exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \theta_1)^2\right]\right\}} \\
&= \exp\left\{\frac{\theta_1 - \theta_2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n(\theta_2^2 - \theta_1^2)}{2\sigma^2}\right\}
\end{aligned}$$

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Assim, $\boldsymbol{X}$ tem RVM não decrescente em $t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Então o teste

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) > c \\ 0, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) < c \end{cases}$$

em que $\alpha = P(t(\boldsymbol{X}) > c)$ é um teste UMP de nível α. Para obter c note que:

$$\alpha = P_{\theta_0}\left(\frac{\overline{X} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \left(\frac{c}{n} - \theta_0\right)/c\sqrt{n}\right) = P_{\theta_0}(Z > c^*), Z \sim N(0,1)$$

- Assim, rejeitamos H_0 se $(c^* \equiv z_{1-\alpha})$

$$\frac{\overline{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} > c^* \leftrightarrow \overline{x} > z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0$$

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Dessa forma, a função poder do teste é dada por:

$$
\begin{aligned}
\psi(\theta) = P_\theta(Z > c^*) &= P_\theta\left(\overline{X} > z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \theta_0\right) \\
&= P_\theta\left(\frac{\overline{X} - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha} + \frac{\theta - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}
$$

- OBS: No exemplo acima, $f(\boldsymbol{x};\theta) = h(\boldsymbol{x})\exp\left\{c(\theta)\sum_{i=1}^{n} x_i + d(\theta)\right\}$, em que $c(\theta) = \frac{\theta}{\sigma^2}$. Como $c(.)$ é não decrescente em θ, então a distribuição de $\boldsymbol{X}$ tem RVM não decrescente em $t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ e o resultado anterior segue.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Corolário: Se a distribuição de $\boldsymbol{X}$ é tal que

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) = h(\boldsymbol{x}) \exp\left\{c(\theta)t(\boldsymbol{x}) + d(\theta)\right\},$$

em que $c(.)$ é uma função monótona em θ. Então $\exists$ um teste UMP para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

a) Se $c(.)$ é não decrescente em θ, então o teste de tamanho α UMP é dado por:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > c \\ \gamma, & \text{se } t = c \\ 0, & \text{se } t < c \end{cases}$$

em que c é obtido através de $\alpha = \mathcal{E}_{\theta_0}(\phi(T))$.

b) Se $c(.)$ é não crescente em θ, então o teste de tamanho α UMP é dado por:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t < c \\ \gamma, & \text{se } t = c \\ 0, & \text{se } t > c \end{cases}$$

em que c é obtido através de $\alpha = \mathcal{E}_{\theta_0}(\phi(T))$. Prova: Exercício.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- OBS: Se as hipóteses forem $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$, e se $c(.)$ é não decrescente em θ, então o teste UMP de tamnho α é dado por :

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } t < c \\ \gamma, & \text{se } t = c \\ 0, & \text{se } t > c \end{cases}$$

em que c é obtido através de $\alpha = \mathcal{E}_{\theta_0}(\phi(T))$.

- Se $c(.)$ é não crescente, então um teste UMP de tamanho α é dado por:

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > c \\ \gamma, & \text{se } t = c \\ 0, & \text{se } t < c \end{cases}$$

em que c é obtido através de $\alpha = \mathcal{E}_{\theta_0}(\phi(T))$.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Se $\boldsymbol{X}$ tem RVM não decrescente em $t(\boldsymbol{x})$, então (é possível provar) que, se $\theta_1 \leq \theta_2$:

$$\begin{aligned} P_{\theta_2}(t(\boldsymbol{X}) > c) &\geq P_{\theta_1}(t(\boldsymbol{X}) > c) \text{ e} \\ P_{\theta_2}(t(\boldsymbol{X}) \leq c) &\leq P_{\theta_1}(t(\boldsymbol{X}) \leq c) \end{aligned}$$

- Se $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ e
  - $\boldsymbol{X}$ tem RVM não decrescente: $\psi(\theta) = P_\theta(t(\boldsymbol{X}) > c)$. Temos que: $\Psi(\theta_2) \geq \psi(\theta_1)$, $\forall \theta_1 \leq \theta_2$
  - $\boldsymbol{X}$ tem RVM não crescente:

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } t < c \\ 0, & \text{se } t > c \end{cases} \leftrightarrow \delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } t^* > c^* \\ 0, & \text{se } t^* < c^* \end{cases}$$

em que $t^* = -t$ e $c^* = -c$, $\boldsymbol{X}$ tem RVM não decrescente em $t^*(\boldsymbol{x})$.
  - Do item anterior, segue que $\psi(.)$ é crescente em θ.

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Se $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$. Se $\boldsymbol{X}$ tem RVM não decrescente, então:

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } t < c \\ 0, & \text{se } t > c \end{cases}$$

- Portanto, $\psi(\theta) = P_\theta(t(\boldsymbol{X}) < c)$ tem um comportamento monótona não crescente e o resultado segue.
- Teorema: Seja $\boldsymbol{X}$ tal que $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) = h(\boldsymbol{x}) \exp\{c(\theta)t(\boldsymbol{x}) + d(\theta)\}$ (ou mesmo fora da FE, contanto que $\boldsymbol{X}$ tenha RVM em $t(\boldsymbol{x})$), em que $c(.)$ é uma função monótona em θ e considere as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \theta \leq \theta_1 \text{ ou } \theta \geq \theta_2 \text{ vs } H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$$

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Então, $\exists$ um teste UMP de tamanho α, tal como se segue:
  a) Se $c(.)$ é não decrescente então

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } c_1 < t(\boldsymbol{x}) < c_2 \\ \gamma_i, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) = c_i, i = 1,2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

em que c_i's são obtidos das equações

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathcal{E}_{\theta_i}(\phi(t)), i = 1,2 \\ \alpha &= P_{\theta_1}(c_1 < t(\boldsymbol{X}) < c_2) + \gamma_1 P_{\theta_1}(t(\boldsymbol{X}) = c_1) \\ \alpha &= P_{\theta_2}(c_1 < t(\boldsymbol{X}) < c_2) + \gamma_2 P_{\theta_2}(t(\boldsymbol{X}) = c_2) \end{aligned}$$

Teste uniformemente mais Poderoso (Teste UMP)

- Então, $\exists$ um teste UMP de tamanho α, tal como se segue:
  b) Se $c(.)$ é não crescente então

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) < c_1 \text{ ou } t(\boldsymbol{x}) > c_2 \\ \gamma_i, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) = c_i, i = 1, 2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

em que $c_i's$ são obtidos das equações

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathcal{E}_{\theta_i}(\phi(t)), i = 1, 2 \\ \alpha &= P_{\theta_1}(t(\boldsymbol{X}) < c_1 \text{ ou } t(\boldsymbol{X}) > c_2) + \gamma_1 P_{\theta_1}(t(\boldsymbol{X}) = c_1) \\ \alpha &= P_{\theta_2}(t(\boldsymbol{X}) < c_1 \text{ ou } t(\boldsymbol{X}) > c_2) + \gamma_2 P_{\theta_2}(t(\boldsymbol{X}) = c_2) \end{aligned}$$

Teste uniformemente mais poderoso não viciado (Teste UMPNV)

- Sabemos que, sob certas condições, $\exists$ um teste UMP para testar

$$H_0 : \theta \leq \theta_1 \text{ ou } \theta \geq \theta_2 \text{ vs } H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$$

Mas, para testar hipóteses da forma :

$$a)\ H_0 : \theta_1 < \theta < \theta_2 \text{ vs } H_1 : \theta \leq \theta_1 \text{ ou } \theta \geq \theta_2$$

$$b)\ H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1 : \theta \neq \theta_0$$

nem sempre há. No entanto, podemos obter testes UMP, por exemplo, restritos à alguma classe de testes, como os não viciados?

Teste UMPNV

- Def: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de X com fdp $f_{\boldsymbol{X}}(.;\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}$. Um teste $\phi(.)$ de nível α, para testar $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta_0^c$ é não viciado se,

$$\mathcal{E}_{\theta_1}(\phi(\boldsymbol{X})) \geq \alpha, \forall \theta_1 \in \Theta_1 \text{ e } \mathcal{E}_{\theta_1}(\phi(\boldsymbol{X})) \leq \alpha, \forall \theta_1 \in \Theta_0$$

- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 conhecido e considere as hipóteses: $H_0 : \theta = \theta_0$ vc $H_1 : \theta \neq \theta_0$, temos que

$$a)\ \delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \left|\sqrt{n}\frac{\overline{x}-\theta_0}{\sigma}\right| > c \\ 0, & \text{cc} \end{cases}$$

é um teste não viciado ($\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \psi(\theta)$), se σ^2 for conhecido.

Teste UMPNV

- Também é não viciado o teste

$$b)\ \delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \left|\sqrt{n}\frac{\overline{x}-\theta_0}{s}\right| > c \\ 0, & \text{cc} \end{cases}$$

se σ^2 for desconhecido, em que $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

- Teorema: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de X com $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) = h(\boldsymbol{x})\exp\{c(\theta)t(\boldsymbol{x}) + d(\theta)\}$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}$. Para as hipóteses :

$$H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \text{ vs } H_1 : \theta < \theta_1 \ \text{ ou } \theta > \theta_2$$

ou

$$H_0' : \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1' : \theta \neq \theta_0$$

em que $c(.)$ é uma função monótona não-decrescente em θ. Então $\exists$ um teste UMPNV de nível α dado por:

Teste UMPNV

- Cont.

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{ se } t(\boldsymbol{x}) < c_1 \text{ ou } t(\boldsymbol{x}) > c_2 \\ \gamma_i, t(\boldsymbol{x}) = c_i, i = 1, 2 \\ 0, \text{ cc} \end{cases}$$

em que c_1, c_2, γ_1 e γ_2 são obtidos (para a hipótese H_0 : pelas equações: $\alpha = \mathcal{E}_{\theta_i}(\phi(\boldsymbol{X}))$. Sob H_0', as constantes em questão são obtidas a partir de:

$$\alpha = \mathcal{E}_{\theta_0}(\phi(\boldsymbol{X}))$$

- Obs: O resultado também vale se $\boldsymbol{X}$ tiver RVMND em $t(\boldsymbol{x})$.
- Obs: Sejam $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ e H_0' vs H_1'. Temos que $\alpha = P_{\theta_0}(t(\boldsymbol{X}) < c_1 \cup t(\boldsymbol{X}) > c_2)$.

Teste UMPNV

- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$, uma aa de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 conhecido. Obtenha um teste UMPNV para testar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
- Note que:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}; \theta) = \exp\left\{c(\theta)t(\boldsymbol{x}) + d(\theta)\right\} h(\boldsymbol{x})$$

em que $t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $c(\theta) = \frac{\theta}{\sigma^2}$.

- Então, um teste mais UMPNV, de tamanho α, é dado por

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t(\boldsymbol{x}) < c_1 \text{ ou } t(\boldsymbol{x}) > c_2 \\ 0, & \text{cc} \end{cases}$$

em que $\alpha = P_{\theta_0}(t(\boldsymbol{X}) < c_1 \cup t(\boldsymbol{X}) > c_2)$.

Teste UMPNV

- Uma vez que, sob $H_0 : \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \theta_0) \sim N(0,1)$, o teste pode ser reescrito como:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \theta_0) < c_1^* \text{ ou } \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \theta_0) > c_2^* \\ 0, & \text{cc} \end{cases}$$

- Além disso, $Z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \theta_0)$, sob H_0, tem distribuição simétrica em torno do 0, tomemos $c_2^* = c$ e $c_1^* = -c$. Assim, o teste pode ser escrito como $(z = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x} - \theta_0))$:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |z| > c \\ 0, & \text{cc} \end{cases}$$

e c é determinado, dado α, de modo que $(Y = Z^2 \sim \chi^2_1$, sob $H_0)$

$$\alpha = P(|Z| > c) = P(Z^2 > c^2) = P(Y > c^*), c^* = c^2$$

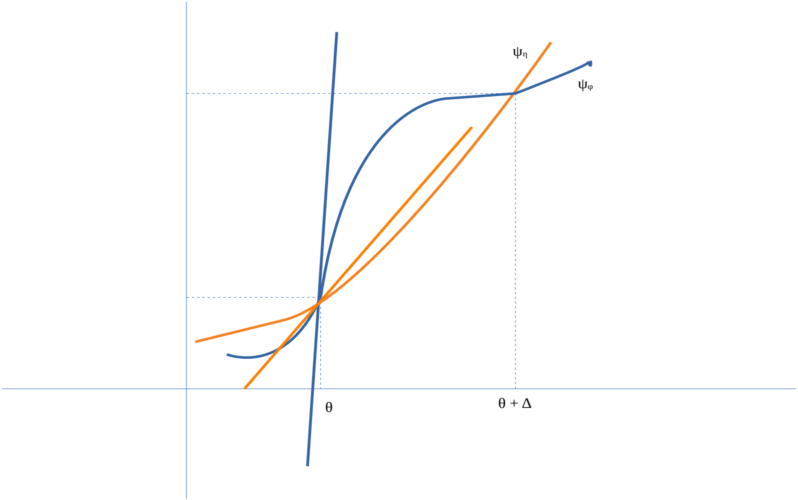
Teste Localmente mais poderoso

- Teste localmente mais podereso. Def: Um teste com função poder $\psi(.)$ é um teste localmente mais poderoso (LMP) para testar:

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ vs } H_1 : \theta > \theta_0$$

- Se, para qualquer outro teste com função poder $\psi'(.)$, satisfazendo $\psi(\theta_0) = \psi'(\theta_0)$, $\exists \Delta > 0$, tal que $\psi(\theta_0) \geq \psi'(\theta_0)$, $\forall \in (\theta_0, \theta_0 + \Delta)$. Graficamente, temos (a seguir):

Função poder



Teste LMP

- Podemos observar, então, que o teste LMP é aquele que possui tangente máxima no ponto θ_0. Ou seja, aquele em que

$$\frac{d}{d\theta}\Psi(\theta)\bigg|_{\theta=\theta_0}$$

é máxima. Se a distribuição dos dados é contínua, então:

$$\psi(\theta) = \int \phi(x) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) d\boldsymbol{x}; \frac{d}{d\theta}\psi(\theta) = \int \phi(x) \frac{d}{d\theta} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) d\boldsymbol{x}$$

e

$$\alpha = \int \phi(x) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_0) d\boldsymbol{x}$$

Teste LMP

- E o teste LMP, pode-se provar, é dado por:

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x}) &= \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{\partial}{\partial\theta} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta)|_{\theta=\theta_0} > k f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_0) \\ 0, & \text{cc} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta)|_{\theta=\theta_0} > k \\ 0, & \text{cc} \end{cases}\end{aligned}$$

- Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim t(\theta, 1, \nu)$, $\theta \in \mathcal{R}$, $\nu \in \mathcal{R}^+$ conhecido. Queremos testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$. Temos que:

$$f_X(x;\theta) = \frac{(\nu+1)/2}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{\nu + (x-\theta)^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

Teste LMP

- Portanto, vemos que:

$$\frac{\partial}{\partial} \ln f_X(x;\theta) = \frac{(\nu+1)(x-\theta)}{\nu+(x-\theta)^2}$$

- Logo,

$$\frac{d}{d\theta} \ln f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_X(x_i;\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\nu+1)(x_i-\theta)}{\nu+(x_i-\theta)^2}$$

- Portanto, o teste LMP, é dado por:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{i=1}^{n} \frac{(\nu+1)(x_i-\theta)}{\nu+(x_i-\theta)^2} > k \\ 0, & \text{cc} \end{cases}$$

Teste LMP

- Dado α, k é obtido a partir de:

$$\alpha = P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(\nu+1)(X_i-\theta)}{\nu+(X_i-\theta)^2} > k\right) = P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i > k\right)$$

- Se n for suficientemente grande, $Z = \sqrt{n}\frac{\overline{T}-\mathcal{E}(T)}{\sqrt{\mathcal{V}(T)}} \approx N(0,1)$, e, assim, temos que:

$$\alpha \approx P_{\theta_0}\left(Z > k^*\right)$$

em que $\overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$, $T_i = \frac{(\nu+1)(X_i-\theta)}{\nu+(X_i-\theta)^2}$ (discutiremos um pouco mais sobre o assunto, na parte de Testes Assintóticos).

Teste da razão de verossimilhanças

- Seja $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^K$ e seja $L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{x}) \equiv L(\boldsymbol{\theta}) = f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})$ a verossimilhança considere as hipóteses:

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \text{ vs } H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1 = \Theta_0^c$$

- A estatística da razão de verossimilhanças é definida por

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\boldsymbol{\theta})}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\boldsymbol{\theta})} = \frac{L(\widetilde{\theta}_0)}{L(\widetilde{\theta})}$$

em que $\widetilde{\theta}_0$ é a EMV de θ sob H_0 e $\widetilde{\theta}$ é a EMV sob o modelo irrestrito (sob Θ).

- A RC do teste é dada por $\lambda(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n, \lambda(\boldsymbol{x}) \leq c\}$.

Teste da razão de verossimilhanças

- Observações:
  a) $0 \leq \lambda(\boldsymbol{x}) \leq 1$.
  b) De a), temos que é suficiente escolher c,$c \in (0, 1)$.
  c) Temos que
  $$-2\ln\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{D} \chi^2_q$$
  sob certas condições de regularidade, em que q : é o número de parâmetros sob o modelo irrestrito (H_1) - número de parâmetros sob o modelo restrito.

Teste da razão de verossimilhanças

- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de X, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconhecido. Considere as hipóteses $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Sob H_0, $\widetilde{\mu}_0 = \mu_0$, $\widetilde{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2$. Sob o modelo irrestrito, temos que: $\widetilde{\mu} = \overline{x}$, $\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$. Assim,

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{(2\pi)^{-n/2}(\widetilde{\sigma}_0^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\widetilde{\sigma}_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right\}}{(2\pi)^{-n/2}(\widetilde{\sigma}^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\widetilde{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}^2)\right\}}$$

Teste da razão de verossimilhanças

- Notando que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \mu_0)^2$, temos que:

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\widetilde{\sigma}_0^2}\right)^{n/2} = \left(\frac{1}{1 + \frac{n(\overline{x}-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}\right)^{n/2}.$$

- Sob H_0, note que $T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{S} \sim t_{n-1}$, em que $S = \sqrt{S^2}$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$. Por outro lado, rejeitamos H_0

$$\begin{aligned} \lambda(\boldsymbol{x}) &\leq c \leftrightarrow \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{n-1}}\right)^{n/2} \leq c \leftrightarrow t^2 \geq c^* \\ &\leftrightarrow t \geq c^{**} \text{ ou } t \leq -c^{**} \leftrightarrow |t| \geq c^{**} \end{aligned}$$

Teste da razão de verossimilhanças

- Em que $t = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{s}$, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.
- Portanto, dado α, c^{**} é obtido a partir de $\alpha = P_{\mu_0}(|T| > c^{**})$, sob H_0. Ou então, pela simetria da distribuição t, $\frac{\alpha}{2} = P(T > c^{**})$
- Obs: Se σ^2 for conhecido, então

$$RC = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : \left| \frac{\sqrt{n}(\overline{x} - \mu_0)}{\sigma} \right| > c \right\}$$

em que c pode ser encontrado de forma análoga ao caso anterior (exercício).

Teste da razão de verossimilhanças

- Exemplo Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de X, em que $f_X(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}\mathbb{1}_{(\theta,\infty)}(x)$. Determine a ERV para testar $H : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.
- Temos que: $L(\theta) = e^{-n(\overline{x}-\theta)}\mathbb{1}_{(0,y_1)}(\theta)$, em que $y_1 = \min(\boldsymbol{x})$. Sob H_0, temos que $(\theta \leq \theta_0)$ e

$$\widetilde{\theta}_0 = \begin{cases} y_1, & \text{se } y_1 \leq \theta_0 \\ \theta_0, & \text{se } y_1 > \theta_0 \end{cases}$$

- Sob o modelo irrestrito, $\widetilde{\theta} = y_1$. Logo

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } y_1 \leq \theta_0 \\ \frac{L(\widetilde{\theta}_0)}{L(\widetilde{\theta})}, & \text{se } y_1 > \theta_0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } y_1 \leq \theta_0 \\ e^{-n(y_1-\theta_0)}, & \text{se } y_1 > \theta_0 \end{cases}$$

Teste da razão de verossimilhanças

- Assim, $RC = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : \lambda(\boldsymbol{x}) \leq c\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : y_1 > c^*\}$
  em que, dado α, c^* é obtido por

$$\alpha = P_{\theta_0}(Y_1 \geq c^*) = P_{\theta_0}(Y_1 - \theta_0 \geq c^* - \theta_0) = P_{\theta_0}(Y_1 - \theta_0 > c^{**})$$

- Sob H_0 (neste caso, sob $\theta = \theta_0$, tamanho do teste)
  $Y_1 - \theta_0 \sim \exp(1/n)$, ou seja: $f_{Y_1}(y_1) = ne^{-ny_1}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y_1)$.
- Exercício: obter c^{**} explicitamente.
- Exercício: obtenha a respectiva função poder.

Teste da razão de verossimilhanças

- Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, σ^2 conhecido. Ache a erv para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.
- Sejam θ_1 e θ_2, $\theta_1 < \theta_2 \leq \theta_0$, então

$$
\begin{aligned}
& -\theta_1 > -\theta_2 \leftrightarrow x_i - \theta_1 > x_i - \theta_2 \leftrightarrow (x_i - \theta_1)^2 > (x_i - \theta_2)^2 \\
\leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2 > \sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_2)^2 \\
\leftrightarrow \quad & -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i-1}^{n}(x_i - \theta_1)^2 < -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i-1}^{n}(x_i - \theta_2)^2 \leftrightarrow L(\theta_1) < \text{Ł}(\theta_2).
\end{aligned}
$$

- Portanto, sob H_0, $\widetilde{\theta}_0 = \theta_0$.
- Por outro lado, sob o modelo irrestrito, $\widetilde{\theta} = \overline{x}$.

Teste da razão de verossimilhanças

- Assim

$$
\begin{aligned}
\lambda(\boldsymbol{x}) &= \frac{L(\theta_0)}{L(\overline{x})} = \frac{(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2\right\}}{(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\right\}} \\
&= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{\theta_0}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n\theta_0^2}{2\sigma^2}\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{\overline{x}}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n\overline{x}^2}{2\sigma^2}\right\}} \\
&= \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}\left[\overline{x}^2-2\overline{x}\theta_0+\theta_0^2\right]\right\} = \exp\left\{\frac{-n}{2\sigma^2}[\overline{x}-\theta_0]^2\right\}
\end{aligned}
$$

Teste da razão de verossimilhanças

- Mas,

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{x}) &< c \leftrightarrow \exp\left\{\frac{-n}{2\sigma^2}[\overline{x}-\theta_0]^2\right\} < c \\ &\leftrightarrow \frac{-n}{2\sigma^2}[\overline{x}-\theta_0]^2 < \ln c \leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma}[\overline{x}-\theta_0] > c^*\end{aligned}$$

- Log, a RC é dada por:

$$RC = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n, \lambda(\boldsymbol{x}) < c\} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : \frac{\sqrt{n}}{\sigma}[\overline{x}-\theta_0] > c^*\right\}$$

em que, dado α, c^* é obtido a partir de:

$$\alpha = P_{\theta_0}\left(\frac{n}{\sigma}(\overline{X}-\theta_0) > c^*\right) = P_{\theta_0}(Z > c^*)$$

$Z \sim N(0,1)$. Exercício: obtenha a função poder.

Teste da razão de verossimilhanças

- Teorema: Seja $T = t(\boldsymbol{X})$ uma estatística suficiente para θ. Então $\lambda(\boldsymbol{x}) = \lambda^*(t(\boldsymbol{x}))$.
- Dem: Se T é uma estatística suficiente, então pelo CF, $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) = h(\boldsymbol{x})g(t(\boldsymbol{x});\theta)$, em que, sem perda de generalidade, podemos supor que $g_T(.;\theta)$ é a fdp de T.
- Portanto para $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$, então

$$
\begin{aligned}
\lambda(\boldsymbol{x}) &= \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} L(\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta} L(\theta)} = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} h(\boldsymbol{x})g(t;\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta} h(\boldsymbol{x})g(t;\theta)} \\
&= \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} g(t;\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta} g(t;\theta)} = \lambda^*(t(\boldsymbol{x}))
\end{aligned}
$$

- Note que, $t(\boldsymbol{x}) \to g(t;\theta) = g(t(\boldsymbol{x});\theta) = L^*(\theta; t(\boldsymbol{x}))$. Portanto,

$$
\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} L^*(\theta; t(\boldsymbol{x}))}{\sup_{\theta\in\Theta} L^*(\theta; t(\boldsymbol{x}))} = \frac{L^*(\widetilde{\theta}_0; t(\boldsymbol{x}))}{L^*(\widetilde{\theta}; t(\boldsymbol{x}))}
$$

TRV para populações normais

- Teste para médias: Sejam $X_1, ..., X_n$, aa de $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y_1, ..., Y_m$ aa de $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, mutuamente independentes.
- Queremos testar $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$. Algumas situações de possível interesse:
  1. σ_1^2 e σ_2^2 conhecidos (exercício).
  2. σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidos porém iguais ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$).
  3. σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidos porém diferentes (problema de Behrens-Fisher, pesquisar).

Cont.

- Situação 2). Sob o modelo irrestrito, temos que: $\widetilde{\mu}_1 = \overline{x}$, $\widetilde{\mu}_2 = \overline{y}$, $\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n+m}[(n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2]$, $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, $s_y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$
- Sob H_0, tem-se que: $\widetilde{\mu}_1 = \widetilde{\mu}_2 = \widetilde{\mu}_0 = \frac{1}{n+m}\left(n\overline{x} + m\overline{y}\right)$ e $\widetilde{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{\mu}_0)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \widetilde{\mu}_0)^2\right]$.
- Pode-se mostrar que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}(y_i - \widetilde{\mu}_0)^2 &= \sum_{i=1}^{m}(y_i - \overline{y})^2 + \frac{nm^2}{n+m}(\overline{x} - \overline{y})^2 \\
\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widetilde{\mu}_0)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + \frac{nm^2}{n+m}(\overline{x} - \overline{y})^2
\end{aligned}$$

Cont.

- Assim,

$$
\begin{aligned}
\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \frac{\left(2\pi\widetilde{\sigma}_0^2\right)^{-(n+m)/2}}{\left(2\pi\widetilde{\sigma}^2\right)^{-(n+m)/2}} \\
&\times \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\widetilde{\sigma}_0^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\widetilde{\mu}_0)^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\widetilde{\mu}_0)^2\right]\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2\widetilde{\sigma}^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2\right]\right\}} \\
&= \left(\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\widetilde{\sigma}_0^2}\right)^{(n+m)/2} = \left(\frac{1}{1+\frac{nm}{n+m}\frac{(\overline{x}-\overline{y})^2}{(n-1)s_x^2+(m-1)s_y^2}}\right)^{(n+m)/2}
\end{aligned}
$$

Cont.

- Contudo, sob H_0, temos que:

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}}} \sim t_{(n+m-2)}$$

- Portanto,

$$\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left[\frac{1}{1 + \frac{t^2}{n+m-2}}\right]^{(n+m)/2}$$

Cont.

- Logo,

$$
\begin{aligned}
\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &\leq c \leftrightarrow 1 + \frac{t^2}{n+m-2} \geq c^{-(n+m)/2} \leftrightarrow t^2 \geq c' \\
|t| &\geq c^*
\end{aligned}
$$

- Portanto, $RC = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{R} : |t| \geq c^*\}$ em que, dado α, c^* é obtido através de $\frac{\alpha}{2} = P_{\mu_1=\mu_2}(T > c^*)$ ou $\frac{\alpha}{2} = P_{\mu_1=\mu_2}(T < -c^*)$

Cont.

- Caso geral: Sejam $X_{i1}, ..., X_{in_i}$ uma aa de $X_j \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, ..., k$, $j = 1, 2, ..., n_i$, mutuamente independentes. Vamos testar:

  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$ vs $H_1 : \mu_j \neq \mu_{j'}$ (para pelo menos uma par (i, i')), com $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_k^2 = \sigma^2$ (desconhecidos).
- Sob o modelo irrestrito, as emv são dadas por:
  $\widetilde{\mu}_i = \overline{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$,
  $\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \overline{x}_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) s_i^2$ e $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.
- Sob H_0 as emv são dadas por:
  $\widetilde{\mu}_1 = \widetilde{\mu}_2 = ... = \widetilde{\mu}_k = \widetilde{\mu}_0 = \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_k} x_{ij}$ e
  $\widetilde{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \widetilde{\mu}_0)^2$.

Cont.

- Com os devidos desenvolvimentos, chega-se à

$$\lambda(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_k) = \left(\frac{1}{1 + \frac{k-1}{n-k} f} \right)^{n/2} \text{ (ver Mood et al (1974) pág. 437)}$$

em que f é um valor observado de

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\overline{x}_i - \overline{x})^2/(k-1)}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (\overline{x}_{ij} - \overline{x}_i)^2/(n-k)} \overset{\text{sob } H_0}{\sim} F_{(k-1,n-k)}$$

- Portanto,

$$\begin{aligned} \lambda(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_k) &\leq c \leftrightarrow 1 + \frac{k-1}{n-k} f \geq \frac{1}{c^{2/n}} \\ &\leftrightarrow f \geq \left(\frac{1}{c^{2/n}} - 1 \right) \left(\frac{n-k}{k-1} \right) = c_0 \end{aligned}$$

Cont.

- Assim, $RC = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{R}^n : f \geq c_0\}$, em que, dado α, c_0 é observado a partir de:

$$\alpha = P_{\mu_1 = \ldots = \mu_k}(F > c_0), F \sim F_{(k-1, n-k)}.$$

- Dados pareados: Sejam

$$\left(\begin{array}{c} X_1 \\ Y_1 \end{array}\right) \ldots \left(\begin{array}{c} X_n \\ Y_n \end{array}\right) \overset{iik}{\sim} N_2\left(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}\right)$$

em que $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)'$, $\boldsymbol{\Sigma} = \left[\begin{array}{cc} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{array}\right]$.

Cont.

- (cont.) Queremos testar: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \leftrightarrow H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ vs $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$.
- Seja $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1, 2, ..., n$,

$$Z_i \overset{i.i.d}{\sim} N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) \equiv N(\mu_Z, \sigma_Z^2).$$

- Assim, testar as hipóteses acima, equivale a testar: $H_0' : \mu_Z = 0$ vs $H_1 : \mu_Z \neq 0$.

Cont.

- Assim, testar as hipóteses acima, equivale a testar: $H_0' : \mu_Z = 0$ vs $H_1 : \mu_Z \neq 0$.
- Neste caso, a RC é dada por: $RC = \{\boldsymbol{z} \in \mathcal{R}^n : |t| > c_0\}$ e

$$T = \frac{\overline{Z}}{S_Z/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)},$$

em que $\overline{Z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$, $S_Z^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z})^2$ e c_0 é obtido a partir de

$$\alpha = P_{\mu_Z=0}(|T| > c_0) \text{ ou } \frac{\alpha}{2} = P_{\mu_Z=0}(T > c_0).$$

Cont.

- Exemplo: Igualdade de variâncias. Sejam $X_1, ..., X_n$ aa de $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y_1, ..., Y_m$ aa de $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Queremos, testar

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ vs } H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

- Casos possíveis:
  1. μ_1, μ_2 conhecidos.
  2. μ_1, μ_2 desconhecidos.

Cont.

- Situação 1): $\Theta_0 = \left\{(\sigma_1^2, \sigma_2^2) \in \mathcal{R}^{+2}, \sigma_1^2 = \sigma_2^2\right\}$ e $\Theta_1 = \left\{(\sigma_1^2, \sigma_2^2) \in \mathcal{R}^{+2}\right\}$.
- Sob o modelo irrestrito, temos que $\widetilde{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2$ e $\widetilde{\sigma}_2^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \mu_2)^2$.
- Sob $H_0 : \widetilde{\sigma}_0^2 = \widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n+m}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_1)^2 + \sum_{i=1}^{m}(y_i - \mu_2)^2\right]$
- Assim,

$$\begin{aligned}
\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \frac{L(\widetilde{\sigma}_0^2)}{L(\widetilde{\sigma}_1^2, \widetilde{\sigma}_2^2)} = \frac{\left(\widetilde{\sigma}_0^2\right)^{-(n+m)/2}}{\left(\widetilde{\sigma}_1^2\right)^{-n/2}\left(\widetilde{\sigma}_2^2\right)^{-m/2}} = \frac{\left(\widetilde{\sigma}_1^2\right)^{-n/2}\left(\widetilde{\sigma}_2^2\right)^{-m/2}}{\left[\frac{1}{n+m}\left(n\widetilde{\sigma}_1^2 + m\widetilde{\sigma}_2^2\right)\right]^{(n+m)/2}} \\
&= \frac{\left(\widetilde{\sigma}_1^2/\widetilde{\sigma}_2^2\right)^{n/2}}{\left[\frac{1}{n+m}\left(n\frac{\widetilde{\sigma}_1^2}{\widetilde{\sigma}_2^2} + m\right)\right]^{(n+m)/2}}
\end{aligned}$$

Cont.

- Sob H_0, temos que:

$$F = \frac{\widehat{\sigma}_1^2/\sigma_1^2}{\widehat{\sigma}_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_1)^2/n}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu_2)^2/m} \sim F_{(n,m)}$$

- Portanto,

$$\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{f^{n/2}}{\left[\frac{nf+m}{n+m}\right]^{(n+m)/2}}$$

- Pode-se mostrar que $\lim_{f \to 0} \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lim_{f \to \infty} \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$
- Exercício: Estudar o comportamento de $\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ em função de f.

Cont.

- Portanto, a RC é dada por:

$$
\begin{aligned}
RC &= \left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{R}^{n+m} : \lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq c\right\} \\
&= \left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{R}^{n+m} : f \leq c_1 \text{ ou } f \geq c_2\right\}
\end{aligned}
$$

- Dado α, para obter c_1 e c_2, podemos considerar:

$$
\frac{\alpha}{2} = P_{\sigma_1^2=\sigma_2^2}(F \leq c_1) \text{ e } \frac{\alpha}{2} = P_{\sigma_1^2=\sigma_2^2}(F \geq c_2)
$$

p-valor ou nível descritivo - medidas de credibilidade

- As vezes, quando se testa uma hipótese, é importante avaliar o grau de certeza (credibilidade) da decisão tomada (rejeitar ou não H_0)
- Há muita discussão sobre o tema (medidas de credibilidade e interpretação do p-valor).
- Suponhamos que, para determinadas hipóteses (H_0 e H_1), a RC seja dada por

$$RC = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : t(\boldsymbol{x}) > k\}$$

- Se, após observar $\boldsymbol{x}$, calcularmos $t(\boldsymbol{x})$ e notaemos que seu valor é muito grande (em relação à k), estaríamos relativamente convictos de rejeitar H_0.
- Ou seja, quanto maior for o valor de t, maior a evidência presente a amostra, contra H_0.

p-valor ou nível descritivo - medidas de credibilidade

- Em um dado problema, a especificação da RC depende de α e k.
- Uma forma alternativa para se tomar uma decisão é considerar o valor observado $\boldsymbol{x}$ ($t(\boldsymbol{x})$) e o valor p (ou p-valor) que, para o nosso exemplo, é dado por:

$$p = p - valor = \sup_{\theta \in \Theta_0} P(T \geq t(\boldsymbol{x})) = q(\boldsymbol{x})$$

- De um modo geral, dado que o teste depende de alguma estatística T, temos que

$$p = \sup_{\theta \in \Theta_0} P(T \text{ ``exceder'' o valor observado } t(\boldsymbol{x}))$$

- Note que a definição acima depende de H_0 e H_1.

p-valor ou nível descritivo - medidas de credibilidade

- Obs:
  a) Como o valor p depende de $\boldsymbol{x}$, então podemos considerá-lo como uma va, ou seja, $q(\boldsymbol{X})$ é uma estatística.
  b) Dado $p = \beta$, o valor observado $\boldsymbol{x}$, permite rejeitar H_0, para qualquer nível (ou tamanho) que não seja inferior à β
- Por outro lado, se $\sup_{\theta \in \Theta_0} \Psi(\theta) \leq \beta$, inplica na não-rejeição de H_0.
- Portanto, o valor p é o menor nível de significância (ou tamanho) que permite rejeitar H_0, com base nos dados.

p-valor ou nível descritivo - medidas de credibilidade

- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim$ Bernoulli$(\theta), \theta \in (0,1)$. Queremos testar: $H_0 : \theta \leq 1/2$ vs $H_1 : \theta > 1/2$.
- Seja: $RC = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i > k \right\}$ (teste não aleatorizado).
- A função poder é dada por $\psi(\theta) = P_\theta(T > k)$ e o tamanho é dado por $\sup_{\theta \in \Theta_0} \psi(\theta) = \psi(1/2)$

p-valor ou nível descritivo - medidas de credibilidade

- Vamos considerar $n = 10$. Então:

k	$P_{\theta_0}(T > k), \theta_0 = 1/2$
10	0
$9 \leq k < 10$	$P(T = 10) = 0,0090$
$8 \leq k < 9$	$P(T \geq 9) = 0,0107$
$7 \leq k < 8$	$P(T \geq 8) = 0,0546$
$6 \leq k < 7$	$P(T \geq 7) = 0,1718$

- Tomando $\alpha = 0,05$ (nível de significância), então $RC = \left\{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^{10} : t = 10 \,\text{ou}\, t = 9\right\}$ e o tamanho é 0,0107.
- Se quisermos um teste com nível $\alpha = 0,055$, então $RC = \left\{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^{10} : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 8\right\}$ e o tamanho é igual a 0,0546.

p-valor ou nível descritivo - medidas de credibilidade

- Se observamos $t(\boldsymbol{x}) = 8$ então se $\alpha = 0,05$, não se rejeita H_0 e se $\alpha = 0,055$, rejeita-se H_0.
- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ aa de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
  - Considere as hipóteses $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$. Nesse caso, um teste apropriado é dado por: $\{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : t > c_0\}$, em que $T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$.
  - Assim, temos que $p = P_{\mu_0}(T > t(\boldsymbol{x}))$, $t(\boldsymbol{x}) = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$, $T \overset{\text{sob } H_0}{\sim} t_{(n-1)}$
  - Se as hipóteses forem $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Um teste apropriado para testar tais hipóteses é dato por $RC = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : |t| > c_0\}$, em que a estatística T (e t) é (são) como anteriormente definida.
  - Assim $p = P(|T| \leq t) = 1 - 2P(T \geq |t|)$.

Exemplo $X \sim U(0, \theta)$

- (TUMP de tamanho α) Hipóteses $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, $\theta_0 > 0, \theta \in \Theta = (0, \infty)$. Considere $\theta_1 < \theta_2 \in \Theta$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) &= \frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(y_n)\mathbb{1}_{(0,y_n)}(y_1) \to \frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_2)}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_1)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^n \frac{\mathbb{1}_{(0,\theta_2)}(y_n)}{\mathbb{1}_{(0,\theta_1)}(y_n)} \\
&= \begin{cases} 1, \text{se}\, 0 < y_n \leq \theta_1 \\ \infty, \text{se}\, \theta_1 \leq y_n \leq \theta_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Então $f_{\boldsymbol{X}}(.;\theta)$ tem RVM não decrescente em θ. Assim, o (pois Y_n é uma estatística completa) TUMP, é dado por (próximo slide):

(cont.) $U(0,\theta)$

- Função teste:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{se } y_n > c \\ 0, \text{se } y_n < c \end{cases}$$

Em que (lembre que $F_{Y_n}(y;\theta) = \frac{y^n}{\theta^n}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(y)$)

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{\theta_0}(Y_n > c) \rightarrow P_{\theta_0}(Y_n \leq c) = 1 - \alpha \rightarrow \frac{c^n}{\theta^n} = 1 - \alpha \\ &\rightarrow c = \theta_0(1-\alpha)^n \end{aligned}$$

(cont.) $U(0,\theta)$

- Portanto:

$$\phi(y_n) = \begin{cases} 1, \text{se } y_n > \theta_0(1-\alpha)^n \\ 0, \text{se } y_n < \theta_0(1-\alpha)^n \end{cases}$$

- Por outro lado, queremos provar que o teste (função) teste

$$\phi_1(y_n) = \begin{cases} 1, \text{se } y_n > \theta_0 \\ \alpha, \text{se } y_n < \theta_0 \end{cases}$$

  é igual ao teste ϕ.
- Como, nesse caso, o TUMP é único, se os tamanhos dos testes ϕ e ϕ_1 foram iguais, então os testes serão iguais (definição de completitude). Já vimos que $\alpha = P_{\theta_0}(Y_n > c) = \mathcal{E}_{\theta_0}(\phi_(Y_n))$. Por outro lado, temos que (próximo slide)

(cont.) $U(0,\theta)$

- cont.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\theta_0}(\phi_1(Y_n)) &= 1 \times P_{\theta_0}(Y_n > \theta_0) + \alpha \times P_{\theta_0}(Y_n < \theta_0) \\ &= 1 - \frac{\theta_0^n}{\theta_0^n} + \alpha\frac{\theta_0^n}{\theta_0^n} = \alpha\end{aligned}$$

- Assim, os testes ϕ e ϕ_1 são iguais.
- Considere a mesma situação, mas agora com as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_0 : \theta \neq \theta_0$.
- Faremos uma "concessão" e construiremos um TUMPNV.

Cont.

- Dada as hipóteses e como o modelo apresenta RVMND em y_n, temos que o TUMPNV é dado por:

$$\phi(y_n) = \begin{cases} 1, \text{se } y_n < c_1 \text{ ou } y_n > c_2 \\ 0, \text{cc} \end{cases}$$

- Além disso, temos que $\mathcal{E}_{\theta_0}(\phi(Y_n)) = \alpha \rightarrow \frac{c_1^n}{\theta_0^n} + 1 - \frac{c_2^n}{\theta_0^n} = \alpha$.
- Por exemplo, $c_1 = \theta_0$, $c_2 = \theta_0\alpha^{1/n}$ satisfazem a equação anterior.
- Como Y_n é uma estatística completa, quaisquer outras escolhas de c_1 e c_2 que levem ao mesmo tamanho, gerarão o mesmo teste.

Exemplo Pareto

- Seja a distribuição de Pareto(α, β), ou seja:

$$f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\beta^{\alpha}\mathbb{1}_{(\beta,\infty)}(x), \boldsymbol{\theta} = (\alpha,\beta)', \alpha, \beta > 0$$

- Fixando β, temos que:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\alpha) \propto \alpha^n \beta^{n\alpha} \exp\left\{-(\alpha+1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right\}$$

- Sejam $\alpha_1 < \alpha_2 \in (0,\infty)$, assim, vem que:

$$\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\alpha_2)}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\alpha_1)} = \frac{\alpha_2^n \beta^{n\alpha_2} \exp\left\{-(\alpha_2+1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right\}}{\alpha_1^n \beta^{n\alpha_1} \exp\left\{-(\alpha_1+1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right\}}$$

Pareto

- Cont.

$$\frac{f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x};\alpha_2)}{f_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x};\alpha_1)} = \frac{\alpha_2^n \beta^{n\alpha_2} \exp\left\{(\alpha_1 - \alpha_2)\sum_{i=1}^n \ln x_i\right\}}{\alpha_1^n \beta^{n\alpha_1}}$$

- Dessa forma, temos que o modelo tem RVMNC em $t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n \ln x_i$.
- Considere as hipóteses $H_0 : \alpha \leq \alpha_0$ vs $H_1 : \alpha > \alpha_0$.
- Assim, um TUMP é dado por:

$$\phi(t(\boldsymbol{x})) = \begin{cases} 1, \text{se } t(\boldsymbol{x}) < c \\ 0, \text{se } t(\boldsymbol{x}) > c \end{cases}$$

Pareto

- Defina, agora, $W = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{\beta}\right) = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
- Temos que $y = \ln \frac{x}{\beta} \to x = \beta e^y$. Assim,

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X(\beta e^y)\beta e^y \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) = \alpha\beta^\alpha \beta^{-\alpha-1} e^{-y\alpha-y}\beta e^y \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \\
&= \alpha e^{-\alpha y}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)
\end{aligned}
$$

- Assim, $W \sim \text{gama}(n, 1/\alpha)$. Logo $V = 2\alpha W \sim \chi^2_{2n}$.

Pareto

- Portanto, um TUMP é dado por:

$$\phi(v) = \begin{cases} 1, \text{se } v \leq c^* \\ 0, \text{se } t(\boldsymbol{x}) > c^* \end{cases}$$

- em que $\alpha = P_{\alpha_0}(V \leq c^*)$.

Pareto

- Fixando α, temos que:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\alpha) \propto \beta^{n\alpha}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\beta,\infty}(x_i) = \beta^{n\alpha}\mathbb{1}_{(\beta,\infty)}(y_1)\mathbb{1}_{(y_1,\infty)}(y_n)$$

- Sejam $\beta_1 < \beta_2 \in (0,\infty)$, temos que:

$$\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\beta_2)}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\beta_1)} = \frac{\beta_2^{n\alpha}\mathbb{1}_{(\beta_2,\infty)}(y_1)}{\beta_1^{n\alpha}\mathbb{1}_{(\beta_1,\infty)}(y_1)} = \begin{cases} 0, \text{se } \beta_1 < y_1 < \beta_2 \\ \frac{\beta_2^{n\alpha}}{\beta_1^{n\alpha}}, \text{se } y_1 > \beta_2 \end{cases}$$

- Assim o modelo tem RVMND em y_1.
- Considere as hipóteses $H_0 : \beta \leq \beta_0$ vs $H_1 : \beta > \beta_0$

Pareto

- Assim, um teste UMP, é dado por:

$$\phi(y_1) = \begin{cases} 1, \text{se } y_1 \geq c \\ 0, \text{se } y_1 < c \end{cases}$$

- em que (tamanho do teste) $\alpha' = P_{\beta_0}(Y_1 \geq c)$.
- Por outro lado,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \alpha\beta^{\alpha}\int_{\beta}^{x} t^{-\alpha-1}dt = \alpha\beta^{\alpha}\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\Big|_{\beta}^{x} = \beta^{\alpha}\left(\beta^{-\alpha} - x^{-\alpha}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}, S_X(x) = \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha} \end{aligned}$$

.

Pareto

- Portanto, $S_{Y_1}(y) = \left(\frac{y}{\beta}\right)^{n\alpha}$. Logo $\alpha' = \left(\frac{c}{\beta_0}\right)^{n\alpha} \rightarrow c = \beta_0 \left(\alpha'\right)^{1/n\alpha}$
- Assim, um teste UMP, é dado por:

$$\phi(y_1) = \begin{cases} 1, \text{se } y_1 \geq \beta_0 \left(\alpha'\right)^{1/n\alpha} \\ 0, \text{se } y_1 < \beta_0 \left(\alpha'\right)^{1/n\alpha} \end{cases}$$