Permutabilidade e o Teorema de de Finetti

Prof. Caio Azevedo

Motivação

- Um dos conceitos mais importantes, e muitas vezes, mais questionáveis da inferência Estatística (probabilidade), é o conceito de independência (probabilística,estatística).
- Em geral, para construção de verossimilhanças, faz-se alguma suposição de independência acerca das variáveis aleatórias envolvidas.
- Uma das principais ferramentas nesse sentido (de se obter alguma estrutura de indpendência) é a "condicionalidade" (condicionar a distribuição das variáveis aleatórias de interesse em alguma "quantidade" (des)conhecida).

Motivação (cont.)

- Suponha que existam duas urnas: uma com 6 bolas brancas e 4 bolas pretas e outra com 4 bolas brancas e 6 bolas pretas.
- Sorteia-se uma urna (com probabilidade $1/2$ para cada uma) e da urna sorteada (sem se saber qual urna foi de fato sorteada), faz-se extrações sucessivas ao acaso, com reposição.
- Tais extrações **não são independentes** pois, à medida que se conhece os resultados, estaremos inclinados à concluir que a urna escolhida é aquela que contem o maior número de bolas da cor que mais vezes foi sorteada.

Motivação (cont.)

- Sejam os eventos $A = \{preta, branca, branca, preta, branca\}$ e B $=$ $\{branca, preta, preta, branca, branca\}$
- Note que (pelo teorema da probabilidade total)
  $P(A) = P(A \cup urna1) + P(A \cup urna2) = \frac{1}{2}[(\frac{3}{5})^3(\frac{2}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5})^3]$
  $P(B) = P(B \cup urna1) + P(B \cup urna2) = \frac{1}{2}[(\frac{3}{5})^3(\frac{2}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5})^3]$
- Logo $P(A) = P(B)$. Na verdade, todas as sucessões que variam apenas na ordem possuem a mesma probabilidade de ocorrência.
- A independência, de fato, é perdida na medida que não sabemos de qual urna estamos selecionando as bolas. Em outras palavras "desconhecemos o verdadeiro valor do parâmetro".

- Dizemos então que os eventos que correspondem à todas as sucessões que variam apenas na ordem, são permutáveis (embora não independentes).
- Em outras palavras, por exemplo:

$$P\{preta, branca, branca, preta, branca\} \neq$$
$$P\{preta\}P\{branca\}P\{branca\}P\{preta\}P\{branca\}$$

(respeitando a ordem de sorteio)

- Dizemos que um conjunto de variáveis aleatórias $X_1, ..., X_n$, com fdp (conjunta) p(.), são permutáveis se:

$$p(x_1, ..., x_n) = p(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)})$$

para qualquer permutação $\{\pi(1), \pi(2)..., \pi(n)\}$

- No contexto da inferência bayesiana, as variáveis aleatórias, em geral, são condicionalmente independentes (condicionados no parâmetro θ) e marginal permutáveis em relação à ela.
- Exemplo: $p(\mathbf{x}) = \frac{1}{n!\left(1+\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{n+1}} \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\infty)}(x_i)$ (são permutáveis:provar)
- Contudo, $X_i|\theta \overset{i.i.d.}{\sim} exp(\theta^{-1})$, com $\theta \sim exp(1)$. Ou seja:

$$p(\mathbf{x}) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^{n} p(x_i|\theta)p(\theta)d\theta$$

- A distribuição acima (veremos mais adiante) é conhecida como distribuiçãpo preditiva à priori.