Poder do teste e determinação do tamanho da amostra: PCA & PBC

Prof. Caio Azevedo

Testes de hipótese (veja aqui)

- Relembrando:
  - $\alpha =$ probabilidade do erro do tipo I: P(Rejeitar $H_0|H_0$ é verdadeira).
  - $\beta =$ probabilidade do erro do tipo II: P(Não rejeitar $H_0|H_0$ é falsa).
  - $\psi =$ poder do teste $: = 1 - \beta$=P(Rejeitar $H_0|H_0$ é falsa).
- Em geral, em qualquer experimento, a probabilidade do erro do tipo I é controlada (α).
- A probabilidade do erro do tipo II (consequentemente o poder do teste) não é, em geral, controlada.

Cont.

- Como determinar tamanhos de amostra (por tratamento/no geral) que garantam um poder mínimo?
- Como calcular o poder do teste, para um dado experimento?
- Vamos nos concentrar nos planejamentos:
  - Completamente casualizados (link).
  - Blocos completos (link).

Distribuição qui-quadrado não central

- Sejam $X_1, X_2, ..., X_n \overset{ind}{\sim} N(\mu_i, \sigma_i^2)$.
- Defina $Y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i}{\sigma_i}\right)^2$. Dizemos então que Y tem distribuição qui-quadrado não central com n graus de liberdade e parâmetro de não-centralidade $\delta = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\mu_i}{\sigma_i}\right)^2$
- Notação $Y \sim \chi^2_{(n,\delta)}$, cuja fdp é dada por

$$f_y(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\delta/2}(\delta/2)^i}{i!} f_{W_{n+2i}}(y) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y),$$

em que $W_{n+2i} \sim \chi^2_{(n+2i)}$

- Se $\delta = 0$, então $Y \sim \chi^2_{(n)}$.

Distribuição F não central

- Seja V uma outra v.a., independente de Y, $V \sim \chi^2_{(m)}$.
- Defina $F = \frac{Y/n}{V/m}$. Então, F tem distribuição F não central com graus de liberdade, n e m e parâmetro de não centralidade δ.
- Notação $F \sim \chi^2_{(n,m,\delta)}$, cuja fdp é dada por

$$
\begin{aligned}
f_F(f) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\delta/2}(\delta/2)^i}{\beta(m/2, n/2+i)i!} \left(\frac{n}{m}\right)^{n/2+i} \left(\frac{m}{m+nf}\right)^{(n+m)/2+i} \\
&\times \quad f^{n/2-1+i} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(f)
\end{aligned}
$$

em que $\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$

ANOVA PCA com um único fator

- Tem-se um único fator com k níveis (grupos ou tratamentos).
- Em cada grupo tem-se $n_i, i = 1, 2, .., k$ unidades experimentais.
- Tem-se um total de $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ observações.

Modelo (CR) para um único fator

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \xi_{ij},$$

$i = 1, 2, .., k,$ (grupos); $j = 1, ..., n_i,$ (unidades experimentais)

- Erros $\xi_{ij} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, μ, α_i não aleatórios.
- Restrição de identificabilidade: $\alpha_1 = 0$.
- Hipóteses de interesse (primário)

$$H_0 : \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_k = 0 \text{ vs } H_1 : \text{pelo menos uma desigualdade}$$

PCA (um único fator)

- Lembremos que, sob H_0,

$$V = SQF/\sigma^2 \sim \chi^2_{(k-1)}.$$

- Independentemente de H_0 ser verdadeira,

$$W = SQR/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n-k)}.$$

- Assim, sob H_0,

$$F = \frac{V/(k-1)}{W/(n-k)} \sim F_{(k-1,n-k)}.$$

PCA (um único fator)

- Lembrando que :

$$\mathcal{E}(SQF) = (k-1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i(\mu_i - \overline{\mu})^2, \overline{\mu} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i.$$

- No caso da parametrização CR, tem-se que

$$\begin{aligned} \mu_i - \overline{\mu} &= \alpha_i - \overline{\alpha} \\ \overline{\mu} &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu_i ; \overline{\alpha} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i . \end{aligned}$$

PCA (um único fator)

- Portanto

$$\mathcal{E}(SQF/\sigma^2) = \underbrace{(k-1)}_{\text{graus de liberdade}} + \underbrace{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{k} n_i(\alpha_i - \overline{\alpha})^2}_{\text{parâmetro de não centralidade}} .$$

- Assim, se H_0 não for verdadeira, então

$$V \sim \chi^2_{(k-1,\delta)}, \delta = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\alpha_i - \overline{\alpha})^2}{\sigma^2}.$$

PCA (um único fator)

- Dessa forma,

$$\mathcal{E}(SQF/\sigma^2) = (k-1) + \delta.$$

- Segue-se que, sob H_1,

$$F \sim F_{(k-1,n-k,\delta)}.$$

PCA (um único fator)

- Regra para obtenção do parâmetro de não-centralidade: em geral,

$$\mathcal{E}(\text{Soma de Quadrados (Fator, Interação, Bloco)}/\sigma^2) =$$

$$\textbf{graus de liberdade} + \textbf{parâmetro de não centralidade}$$

PCA (um único fator)

- Assim, para um dado valor de δ e para um nível de significância fixado α, temos que o (a função) poder do teste é dado por

$$\psi(\delta, \alpha, n) \equiv \psi = P(F_1 > f_c | H_0 \text{ é falsa}), F_1 \sim F_{(k-1, n-k, \delta)},$$

em que f_c (valor crítico) é o valor da distribuição $F_{(k-1,n-k)}$,

$$P(F_0 > f_c | H_0) = \alpha, (F_0 \sim F_{(k-1,n-k)}).$$

PCA (um único fator)

- A função poder (em δ) é dada por:

$$\psi(\delta, \alpha, n) = P(F_1 > f_c | H_0 \text{ é falsa}), F_1 \sim F(k-1, n-k, \delta) \qquad (1)$$

- Para um determinado conjunto de dados, podemos estimar δ, através de

$$\widehat{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\widehat{\alpha}_i - \widehat{\overline{\alpha}})^2}{\widehat{\sigma}^2},$$

- (continuação no próximo slide)

PCA (um único fator)

- (cont.) em que $\widehat{\alpha}_i$ são os estimadores de mínimos quadrados de $\alpha_i, i = 1, 2.., k$ e

$$\widehat{\overline{\alpha}} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\widehat{\alpha}_i; \widehat{\sigma}^2 = QMR.$$

- Logo, o poder estimado é dado por

$$\widehat{\psi} = \psi(\widehat{\delta}, \alpha, n),$$

ou seja, utiliza-se $\widehat{\delta}$ na Equação (1).

Exemplo 2 (retomando)

- Uma bioquímica (Tecnologia de Alimentos) está interessada em estudar a extração de pigmentos naturais, com aplicação como corante em alimentos.
- Numa primeira etapa tem-se a necessidade de escolher o melhor solvente extrator.
- A escolha do(s) melhor(es) solventes foi realizada através da medida da absorbância de um pigmento natural do fruto de baguaçú.
- Fator = tipos de solvente; $k = 5$ níveis; $n_i = 5$, i = 1,...,5 repetições.

Cont.

- Da análise anterior, temos:

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{\alpha}} &= (0; 0,06854; 0,02752; -0,34258; -0,08970)' \\ \widetilde{\sigma}^2 &= 0,0006358708 \end{aligned}$$

- Isto implica que $\widetilde{\delta} = 851,222$.
- Neste caso, para um $\alpha = 0,05$, o valor crítico é igual à $2,866$.
- Assim, o poder estimado será igual à

$$\widetilde{\psi} = P(F_1 > 2,866 | \text{ é falsa}) \equiv P(F_1 > 2,866) > 0,9999.$$

Cont. (no programa R)

```
fit.model.ini<-lm(mabsor~solvfac)

anovatabM1<-anova(fit.model)

sigma2 <- anovatabM1$Mean[2]

# ou sigma2 <- sigma(fit.model.ini)^2

betah <- coef(fit.model.ini)

delta <- sum(5*(c(0,betah[2:5])-sum(betah[2:5])/5)^2)/sigma2

quantf <- qf(0.95,5-1,25-5)

ptest <- 1-pf(quantf,5-1,25-5,delta)
```

Pacotes no R

- Não consegui encontrar pacotes ou funções no R que calculassem o poder dos testes (tabela ANOVA) diretamente do output das funções *lm* ou *anova*.
- Há um pacote (dentre vários) chamado *pwr4exp* que, com base em determinados outputs, calcular o poder para diversas situações e diversos testes de hipótese de interesse.

Cont. (no programa R, pacote *pwr4exp*)

```
# Definindo a estrutura do planejamento e
# informando quantidades de interesse
crd <- designCRD(
    treatments = 5,
    replicates = c(5,5,5,5,5),
    means = c(cmdados$media),
    sigma2 = sigma2
    )
# Calculando poder do teste
pwr.anova(crd)
```

Exemplo 3 (retomando)

- Tem-se o interesse em se saber se a quantidade de fósforo existente (administrada) no solo afeta a produção de milho (de uma certa variedade).
- Fator: quantidade de fósforo, $k = 5$ níveis, $n_i = 4, i = 1, 2, 3, 4$ repetições por tratamento (quantidade de fósforo administrada).
- Procedimento: 20 porções de terras, chamadas de parcelas, (em condições semelhantes) foram consideradas e cada uma delas recebeu uma determinada quantidade de fósforo, de modo aleatório (completamente casualizado).

Exemplo 3 (cont.)

- Da análise anterior, temos:

$$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} = (0; 4,9925; 3,6075; 3,6525; 4,7025)'$$
$$\widetilde{\sigma}^2 = 1,556012.$$

- Logo $\widetilde{\delta} = 40,871$.
- Assim, temos os seguintes resultados, conforme o valor de α escolhido.

α	f_c	$\widetilde{\psi}$
0,90	2,36	0,9992
0,95	3,06	0,9966
0,99	4,89	0,9625

Cont. (no programa R)

```
fit.model.ini<-lm(prodmi~fosffac)
anovatabM1<-anova(fit.model.ini)
sigma2 <- anovatabM1$Mean[2]
betah <- coef(fit.model.ini)
delta <- sum(4*(c(0,betah[2:5])-sum(betah[2:5])/5)^2)/sigma2
quantf <- qf(0.95,5-1,20-5)
ptest <- 1-pf(quantf,5-1,20-5,delta)
```

Cont. (no programa R)

```
# Definindo a estrutura do planejamento e
# informando quantidades de interesse
crd <- designCRD(
treatments = 5,
replicates = c(4,4,4,4,4),
means = c(cmdados$media),
sigma2 = sigma2)
# Calculando poder do teste
pwr.anova(crd)
```

Exemplo 3 (cont.)

- Suponha que o pesquisador queira realizar um outro experimento semelhante à este em questão.
- Ele quer, para $\alpha = 0,95$, um poder de pelo menos 0,90.
- Qual deve ser o tamanho para cada tratamento (consequentemente o tamanho total) para obter este poder (mantendo-se os valores das outras quantidades)?

Exemplo 3 (cont.)

- Note que, no caso dos modelos e análises em questão, via de regra, é muito complicado (ou eventualmente inviável) obter expressões analíticas que associam o(s) tamanhos(s) amostral(is) ao poder do teste.
- Com efeito, o procedimento usual consiste em construir tabelas e/ou gráficos.

n_i	n	f_c	δ	$\widetilde{\psi}$
2	10	5,19	20,43	0,6289
3	15	3,47	30,65	0,9536
4	20	3,06	40,87	0,9966

Como proceder (PCA)

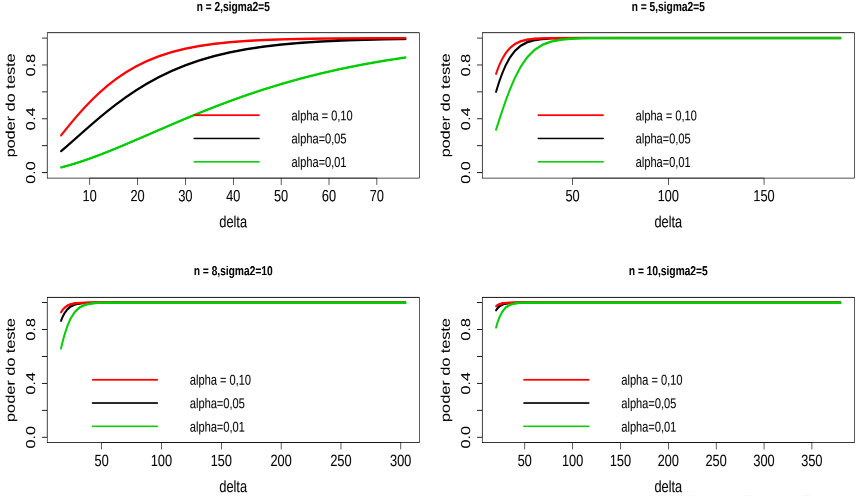
- Perguntar ao pesquisador e/ou usar informações de experimentos anteriores sobre o nível de significância (α).
- Perguntar ao pesquisador e/ou usar informações de experimentos anteriores sobre a variabilidade (σ^2).
- Perguntar ao pesquisador e/ou usar informações de experimentos anteriores sobre a magnitude das diferenças entre as médias.

Exemplo artificial

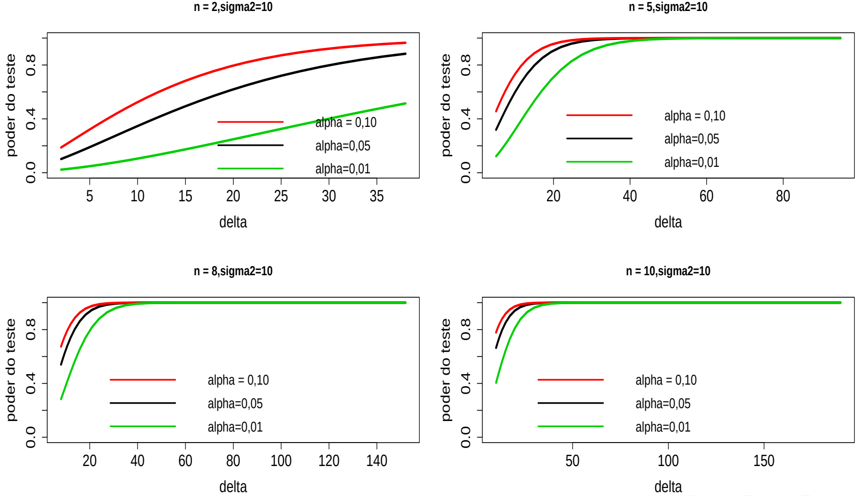
- Três grupos ($k = 3$), experimento balanceado, $\alpha = 0,95$, $\sigma^2 = 5$.

$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2$	n_i	n	$\widetilde{\psi}$	$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^2$	n_i	n	$\widetilde{\psi}$
0,5	2	6	0,0521	50	2	6	0,2746
	3	9	0,0547		3	9	0,5794
	4	12	0,0574		4	12	0,7886
	5	15	0,0599		5	15	0,9032
	10	30	0,0732		10	30	0,9991
2	2	6	0,0586	200	2	6	0,7437
	3	9	0,0694		3	9	0,9919
	4	12	0,0803		4	12	0,9998
	5	15	0,0915		5	15	0,9999
	10	30	0,1502		10	30	$>$ 0,9999

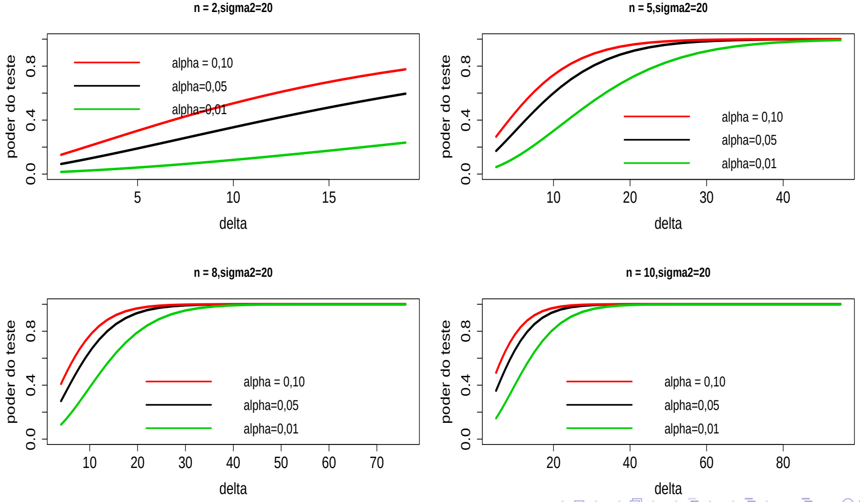
Curvas de poder



Curvas de poder



Curvas de poder



Comentários sobre o poder do teste

- Podemos notar que, quanto maior o valor do parâmetro de não centralidade (δ), maior o poder do teste.
- Quanto maior for a diferença entre as médias e/ou menor for a variância, maior será o valor de δ, consequentemente, maior será o poder do teste.
- Além disso, quanto maior for o valor da probabilidade do erro do tipo I (α), maior será o poder do teste;

PCA desbalanceado com dois fatores

- Fator A: possui a níveis, i=1,..,a.
- Fator B: possui b níveis, j=1,...,b.
- Grupos: há um total de $a \times b$ grupos (tratamentos), que são definidos pelas interseções dos níveis de cada grupo.
- Para cada grupos vamos considerar um total de n_{ij} observações. Cada uma das n_{ij} observações são alocadas aleatoriamente à cada uma das combinações (fatores). Temos uma PCA (planejamento completamente casualizado).
- Neste caso número total de observações $n = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij}$.

Modelo geral (casela de referência)

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \xi_{ijk},$$

(Fator A) $i = 1, 2, ..., a$;(Fator B) $j = 1, 2, ..., b$;

(unidades experimentais), $k = 1, 2, .., n$.

- Erros $\xi_{ijk} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, $\mu, \alpha_i, \beta_j, (\alpha\beta)_{ij}$ não aleatório.
- $\mathcal{E}_{\xi_{ijk}}(Y_{ijk}) = \mu_{ij}, \mathcal{V}_{\xi_{ijk}}(Y_{ijk}) = \sigma^2$.
- Restrições : $\alpha_1 = \beta_1 = (\alpha\beta)_{1j} = (\alpha\beta)_{i1} = 0, \forall i, j$.
- $Y_{ijk} \overset{ind.}{\sim} N(\alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}, \sigma^2)$.

Esperanças das Somas de Quadrados

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(SQF_A) &= (a-1)\sigma^2 + b\sum_{i=1}^{a} n_{ij}(\overline{\mu}_{i.} - \overline{\mu}_{..})^2 \\
\mathcal{E}(SQF_B) &= (b-1)\sigma^2 + a\sum_{j=1}^{b} n_{ij}(\overline{\mu}_{.j} - \overline{\mu}_{..})^2 \\
\mathcal{E}(SQFInt) &= (a-1)(b-1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}[(\mu_{ij} + \overline{\mu}_{..}) - (\overline{\mu}_{i.} + \overline{\mu}_{.j})]^2.
\end{aligned}
$$

Esperanças das Somas de Quadrados

(Cont.) em que

$$
\begin{aligned}
\mu_{ij} &= \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} \\
\overline{\mu}_{i.} &= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\mu_{ij} \\
\overline{\mu}_{.j} &= \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\mu_{ij} \\
\overline{\mu}_{..} &= \frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\mu_{ij}.
\end{aligned}
$$

Esperanças das Somas de Quadrados (cont.)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(SQF_A/\sigma^2) &= \underbrace{(a-1)}_{gl} + \underbrace{b\frac{\sum_{i=1}^{a} n_{ij}(\overline{\mu}_{i.} - \overline{\mu}_{..})^2}{\sigma^2}}_{pnc} \\
\mathcal{E}(SQF_B/\sigma^2) &= \underbrace{(b-1)}_{gl} + \underbrace{a\frac{\sum_{j=1}^{b} n_{ij}(\overline{\mu}_{.j} - \overline{\mu}_{..})^2}{\sigma^2}}_{pnc} \\
\mathcal{E}(SQFInt/\sigma^2) &= \underbrace{(a-1)(b-1)}_{gl} + \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} n_{ij}[(\mu_{ij} + \overline{\mu}_{..}) - (\overline{\mu}_{i.} + \overline{\mu}_{.j})]^2}{\sigma^2}}_{pnc}
\end{aligned}
$$

Estimação dos parâmetros de não centralidade

- Para estimar os parâmetros de não centralidade, basta substituir os parâmetros, pelos seus respectivos estimadores:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mu}_{ij} &= \widehat{\mu} + \widehat{\alpha}_i + \widehat{\beta}_j + \widehat{(\alpha\beta)}_{ij} \\
\widehat{\overline{\mu}}_{i.} &= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \widehat{\mu}_{ij} \\
\widehat{\overline{\mu}}_{.j} &= \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a} \widehat{\mu}_{ij} \\
\widehat{\overline{\mu}}_{..} &= \frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \widehat{\mu}_{ij}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4: Resistência de materiais

- Um engenheiro está desenvolvendo um tipo de bateria para ser usado em um dispositivo eletrônico sujeito à variações extremas de temperatura.
- Fatores de interesse:
  - Tipo de material da placa (Fator A): 1, 2 e 3.
  - Temperatura (Fator B): 15^{o}F, 70^{o}F e 125^{o}F. Equivalente à -9,44^{o}C, 21,11^{o}C e 51,67 ^{o}C, respectivamente

Exemplo 4: Resistência de materiais

- Para cada combinação (tipo de material da placa $\times$ temperatura) 4 baterias foram feitas.
- Variável resposta: tempo de vida em horas de cada bateria . Vamos considerar apenas os dois primeiros níveis de cada fator.

Exemplo 4: Resistência de materiais

- Neste caso, temos que $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = (134,75; 21,00; -77,50; 41,50)$ e $\widetilde{\sigma}^2 = 857,58$.
- Assim, tem-se que $\delta_A = 8,130$, $\delta_B = 15,022$ e $\delta_{Int} = 2,008$; parâmetros de não centralidade associados aos testes de existência de efeito do Fator A, Fator B e interação, respectivamente.
- Assim, temos os seguintes poderes estimados $\widetilde{\psi}_A = 0,7447$, $\widetilde{\psi}_B = 0,9442$ e $\widetilde{\psi}_{Int} = 0,2568$.

No R

```
# poder do teste
alpha<-0.95
sigma2<-anovatabM1$Mean[4]
medias <- cvida$media
mu.. <- mean(medias)
mui. <- c(mean(medias[1:2]),mean(medias[3:4]))
mu.j <- c(mean(medias[c(1,3)]),mean(medias[c(2,4)]))
muij <- medias
```

No R

```
# Fator A (material)
delta <- sum(2*4*(mui.-mu..)^2)/sigma2
quantf <- qf(alpha,1,12)
ptest <- 1-pf(quantf,1,12,delta)
# Fator B (material)
delta <- sum(2*4*(mu.j-mu..)^2)/sigma2
quantf <- qf(alpha,1,12)
ptest <- 1-pf(quantf,1,12,delta)
```

No R

```
# Fator Int
delta <- sum(4*(muij+mu..
- (c(mui.[1],mui.[1],mui.[2],mui.[2])+c(mu.j,mu.j)))^2)/sigma2
quantf <- qf(alpha,1,12)
ptest <- 1-pf(quantf,1,12,delta)
```

No R

```
# Fator Int
delta <- sum(4*(muij+mu..
- (c(mui.[1],mui.[1],mui.[2],mui.[2])+c(mu.j,mu.j)))^2)/sigma2
quantf <- qf(alpha,1,12)
ptest <- 1-pf(quantf,1,12,delta)
```

No R

```
# Definindo a estrutura do planejamento e
# informando quantidades de interesse
crd<-mkdesign(~tempfac+tmaterfac+tmaterfac*tempfac,
         data=data.frame(tmaterfac,
                                  tempfac),
means = cvida$media,sigma2 = sigma2)
# Calculando poder do teste
pwr.anova(crd)
```

PBC: Modelo (casela de referência)

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \xi_{ij},$$

(Fator), $i = 1, 2, 3, ...k$; (Bloco), $j = 1, 2, 3, ..., b$

- Erros $\xi_{ij} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, μ, α_i, τ_j, não aleatórios.
- Restrições : $\alpha_1 = \tau_1 = 0$.

Esperanças das Somas de Quadrados

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(SQF) &= (k-1)\sigma^2 + b\sum_{i=1}^{k}(\overline{\mu}_{i.} - \overline{\mu}_{..})^2 \\
\mathcal{E}(SQB) &= (b-1)\sigma^2 + k\sum_{j=1}^{b}(\overline{\mu}_{.j} - \overline{\mu}_{..})^2
\end{aligned}
$$

Esperanças das Somas de Quadrados

(cont.) em que

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}_{i.} &= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\mu_{ij} \\
\overline{\mu}_{.j} &= \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\mu_{ij} \\
\overline{\mu}_{..} &= \frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\mu_{ij}
\end{aligned}$$

Esperanças das Somas de Quadrados (cont.)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(SQF/\sigma^2) &= (k-1) + \frac{b\sum_{i=1}^{k}(\overline{\mu}_{i.} - \overline{\mu}_{..})^2}{\sigma^2} \\
\mathcal{E}(SQB/\sigma^2) &= (b-1) + \frac{k\sum_{j=1}^{b}(\overline{\mu}_{.j} - \overline{\mu}_{..})^2}{\sigma^2}.
\end{aligned}
$$

Estimação dos parâmetros de não centralidade

- Para estimar os parâmetros de não centralidade, basta substituir os parâmetros, pelos seus respectivos estimadores:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mu}_{ij} &= \widehat{\mu} + \widehat{\alpha}_i + \widehat{\tau}_j \\
\widehat{\overline{\mu}}_{i.} &= \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\widehat{\mu}_{ij} \\
\widehat{\overline{\mu}}_{.j} &= \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\widehat{\mu}_{ij} \\
\widehat{\overline{\mu}}_{..} &= \frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\widehat{\mu}_{ij}.
\end{aligned}
$$

Exercício

- Fazer os desenvolvimentos acima para os modelos com três fatores e interações e com dois fatores (em bloco) e interação entre os fatores principais.