

Modelos mistos (análise de medidas repetidas)

Prof. Caio Azevedo

Exemplo 4: Estudo da eficácia de escovas de dentes

- Considere o estudo na área de Odontopediatria realizado na Faculdade de Odontologia da Universidade de São Paulo por Célia Regina Rodrigues e Symonne Parizotto.
- O objetivo é comparar duas escovas de dente (convencional e monobloco) com respeito à redução de um índice de placa bacteriana (IPB).
- Os valores obtidos correspondem a índices de placa bacteriana medidos nos dentes posteriores (pré-molares e molares) antes e depois da escovação dental de 32 crianças entre 4 e 6 anos de idade.
- O tipo de escova tende a ser melhor quanto maior for sua “capacidade de remoção” da placa bacteriana.

Dados

Tipo de escova	Sessão	Antes	Depois	Indivíduo
CT	1	1,05	1,00	1
CT	2	1,13	0,84	1
CT	3	1,15	0,86	1
CT	4	1,13	0,94	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
CT	1	1,4	1,12	16
CT	2	1,25	0,67	16
CT	3	1,5	1,1	16
CT	4	1,5	1,22	16
MT	1	1,66	1,63	17
MT	2	1,36	1,16	17
MT	3	1,52	0,88	17
MT	4	1,41	1,20	17
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
MT	1	1,15	1	32
MT	2	1,23	1,11	32
MT	3	1,15	1,07	32
MT	4	1,26	1	32



Medidas repetidas

- Este conjunto de dados se enquadra no que chamamos de **Medidas repetidas**.
- De fato, ele corresponde à estrutura que chamamos de **Dados longitudinais**.
- **Medidas repetidas:** quando medimos o(s) mesmo(s) indivíduo(s) em mais de uma condição de avaliação (tempo, distância, peso etc).
- **Dados longitudinais:** são medidas repetidas em que a condição de avaliação não pode ser aleatorizada (tempo, por exemplo).

Medidas repetidas séries temporais

- Mesmo quando a condição de avaliação é o tempo, os dados do tipo **medidas repetidas** diferem-se daqueles que chamamos de **séries temporais**.
- **Medidas repetidas:** em geral temos muitos indivíduos e poucos instantes de avaliação.
- **Séries temporais:** poucos indivíduos e muitos instantes de avaliação.

Questões de interesse

- Comparar os desempenhos do tipo de escova em cada tempo e ao longo do tempo.
- O quanto cada escova é eficaz em reduzir o IPB.
- Modelar a estrutura de dependência (intra indivíduos) assim como as distribuições dos IPB's.

Medidas descritivas (pré-teste)

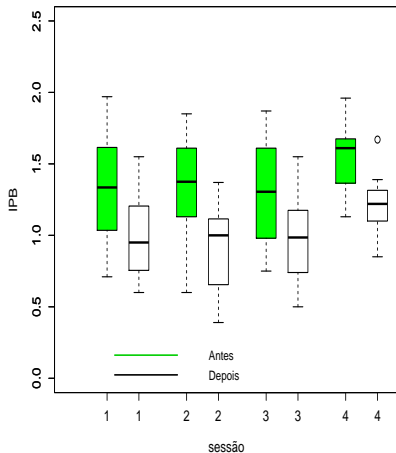
Tipo de escova	Sessão	Média	DP	Var.	CV(%)	Mínimo	Máximo	n
CT	1	1,31	0,35	0,12	26,40	0,71	1,97	16
CT	2	1,35	0,34	0,12	25,20	0,60	1,85	16
CT	3	1,30	0,37	0,13	28,00	0,75	1,87	16
CT	4	1,54	0,26	0,07	16,73	1,13	1,96	16
MT	1	1,33	0,38	0,14	28,17	0,75	2,30	16
MT	2	1,23	0,25	0,06	20,67	0,84	1,60	16
MT	3	1,23	0,22	0,05	17,74	0,88	1,72	16
MT	4	1,36	0,27	0,08	20,16	0,96	2,15	16

Medidas descritivas (pós-teste)

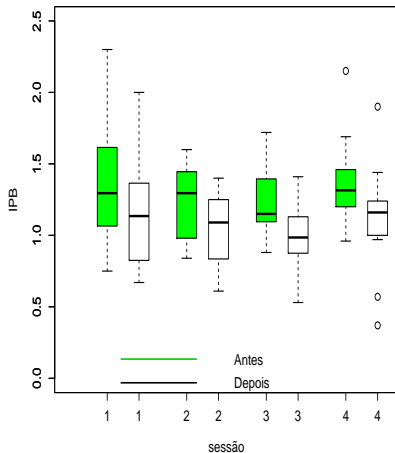
Tipo de escova	Sessão	Média	DP	Var.	CV(%)	Mínimo	Máximo	n
CT	1	0,98	0,30	0,09	30,87	0,60	1,55	16
CT	2	0,91	0,29	0,08	32,17	0,39	1,37	16
CT	3	0,98	0,31	0,10	31,85	0,50	1,55	16
CT	4	1,21	0,20	0,04	16,44	0,85	1,67	16
MT	1	1,15	0,39	0,15	33,55	0,67	2,00	16
MT	2	1,04	0,26	0,06	24,64	0,61	1,40	16
MT	3	0,98	0,24	0,06	24,07	0,53	1,41	16
MT	4	1,12	0,34	0,12	30,32	0,37	1,90	16

Box-plots do IPB

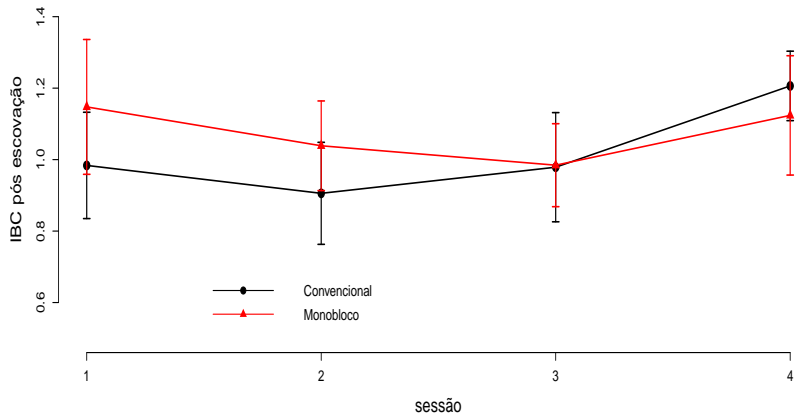
Tipo de escova convencional



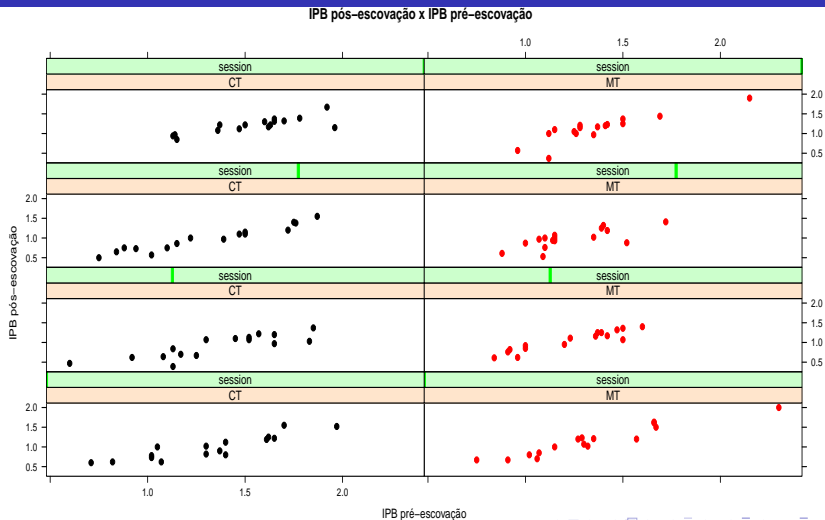
Tipo de escova monobloco



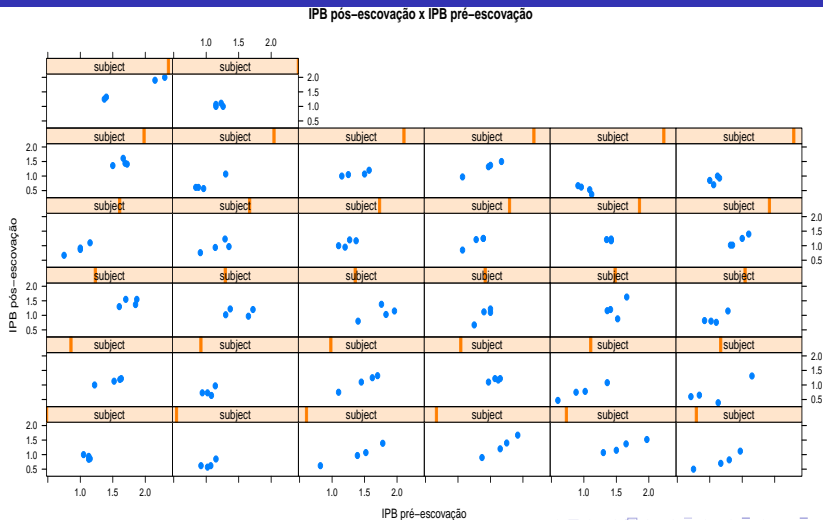
Gráficos de perfis do IPB (pós-teste)



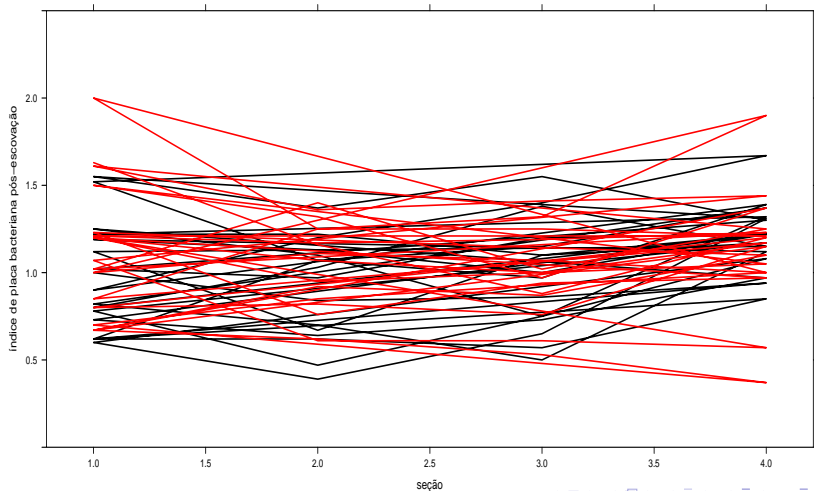
Gráf. de dispersão IPB (pré x pós) por tipo de escova



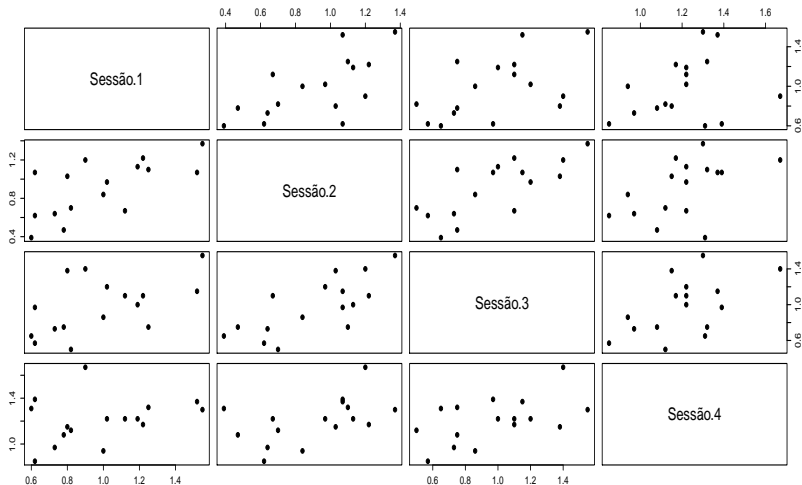
Gráf. de dispersão IPB (pré-teste x pós-teste) por indivíduo



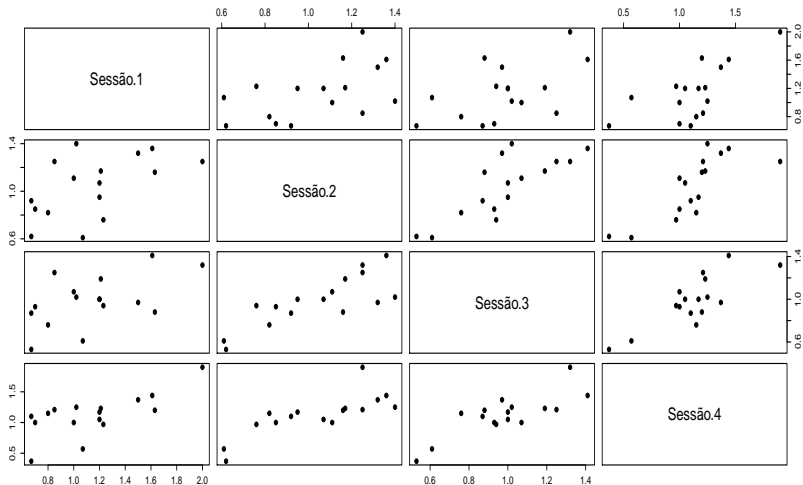
Gráf. de perfis individuais em função das sessões (tempo)



Matriz de dispersão entre os IPB's pós escovação (escova convencional)



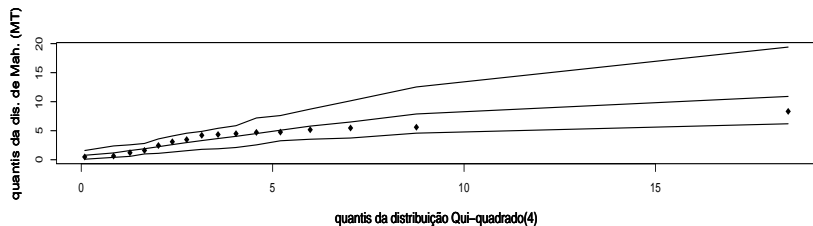
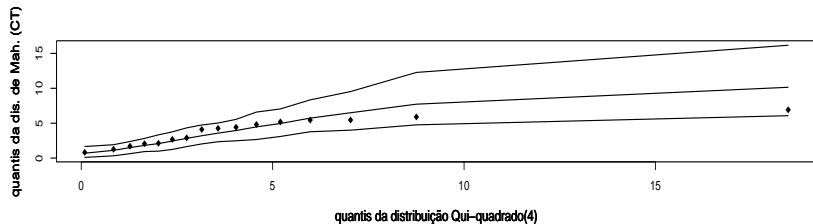
Matriz de dispersão entre os IPB's pós escovação (escova monobloco)



- Variâncias na diagonal principal, covariâncias acima e correlações abaixo (da diagonal principal).

$$\tilde{\Psi}_{CT} = \begin{bmatrix} 0,09 & 0,06 & 0,05 & 0,02 \\ 0,66 & 0,08 & 0,07 & 0,03 \\ 0,54 & 0,74 & 0,10 & 0,03 \\ 0,28 & 0,51 & 0,54 & 0,04 \end{bmatrix}$$
$$\tilde{\Psi}_{MT} = \begin{bmatrix} 0,15 & 0,05 & 0,05 & 0,09 \\ 0,54 & 0,06 & 0,05 & 0,07 \\ 0,54 & 0,80 & 0,06 & 0,06 \\ 0,69 & 0,78 & 0,81 & 0,12 \end{bmatrix}$$

Gráficos de quantis quantis com envelope para a distância de Mahalanobis



Porque não usar os MNLM?

- Como analisar situações desbalanceadas? (os indivíduos são avaliados em diferentes condições de avaliação e/ou em quantidades diferentes).
- Como modelar a matriz de covariâncias?
- Como considerar a variabilidade intra/entre unidades experimentais?
- Como reduzir o número de parâmetros?
- Como modelar heterocedasticidade (variabilidade oriunda de outras fontes de informação)?

Modelagem

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_k + (\alpha\beta)_{ik} + \gamma_{ik}(x_{ijk} - \bar{x}) + \xi_{ijk},$$

$i = 1, 2$ (tipo de escova), $k = 1, 2, 3, 4$ (sessão), $j = 1, 2, \dots, 16$ (indivíduo)

- $\alpha_1 = \beta_1 = (\alpha\beta)_{1k} = (\alpha\beta)_{i1} = 0, \forall i, k$
- x_{ijk} : é o IPB do indivíduo j , submetido ao tipo de escova i , na sessão k , antes da escovação e $\bar{x} = \frac{1}{128} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^{16} x_{ijk}$.
- Y_{ijk} : é o IPB do indivíduo j , submetido ao tipo de escova i , na sessão k , depois da escovação.
- $E(Y_{ijk} | x_{ijk} = \bar{x}) = \mu + \alpha_i + \beta_k + (\alpha\beta)_{ik}$.
- γ_{ik} : é o aumento do IPB pós escovação para indivíduos submetidos ao tipo de escova i na sessão k , para o aumento em uma unidade no IPB pré escovação.

Alternativa (parte sistemática)

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta(k - 1) + \gamma_{ik}(x_{ijk} - \bar{x}) + \xi_{ijk},$$

$i = 1, 2$ (tipo de escova), $k = 1, 2, 3, 4$ (sessão), $j = 1, 2, \dots, 16$ (indivíduo)

- $\alpha_1 = 0$.
- β : é o incremento do IPB pós-escovação de uma seção para a outra consecutiva.
- x_{ijk} : é o IPB do indivíduo j , submetido ao tipo de escova i , na sessão k , antes da escovação e $\bar{x} = \frac{1}{128} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^{16} x_{ijk}$.
- Y_{ijk} : é o IPB do indivíduo j , submetido ao tipo de escova i , na sessão k , depois da escovação.
- $E(Y_{ijk} | x_{ijk} = \bar{x}) = \mu + \beta(k - 1)$.
- γ_{ik} : é o incremento do IPB pós escovação para indivíduos submetidos ao tipo de escova i na sessão k , para o aumento em uma unidade no IPB pré escovação.

Cont.

- Se considerarmos $\xi_{ijk} \stackrel{ind.}{\sim} N(0, \sigma^2)$, teremos o MLN tradicional (homocedástico e com as observações independentes).
- Podemos considerar alguma estrutura de dependência entre os erros (em relação às medidas feitas no mesmo indivíduo). Por exemplo:
$$\text{Cov}(\xi_{ijk}, \xi_{i'jk'}) = \rho, \rho \in \mathfrak{R}, \forall i, i', k, k', i \neq i' \text{ e/ou } k \neq k'.$$
- Podemos considerar a adição de mais uma componente aleatória no modelo acima, ou seja:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_k + (\alpha\beta)_{ik} + \gamma_{ik}(x_{ijk} - \bar{x}) + b_{ij} + \xi_{ijk},$$
$$b_{ij} \stackrel{ind.}{\sim} N(0, \psi_i); \xi_{ijk} \stackrel{ind.}{\sim} N(0, \sigma^2), b_{ij} \perp \xi_{ijk}, \forall i, j, k$$

Cont.

- Para este último modelo temos

$$\text{Cov}(Y_{ijk'}, Y_{i'j'k'}) = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq j' \text{ e/ou } i \neq i' \\ \psi_i + \sigma^2, & \text{se } i = i', k = k', e j = j' \\ \psi_i, & \text{se } i = i', k \neq k' e j = j' \end{cases}$$

- Podemos ainda considerar ambos, ou seja, inserir efeitos aleatórios (b_{ij}) e, ao mesmo tempo, uma estrutura de dependência nos erros (e/ou nos efeitos aleatórios).
- Efeitos fixos: modelam características populacionais.
- Efeitos aleatórios: modelam características individuais.

Modelo normal linear misto

$$\mathbf{Y}_{j(k_j \times 1)} = \mathbf{X}_{j(k_j \times p)}\boldsymbol{\beta}_{(p \times 1)} + \mathbf{Z}_{j(k_j \times q)}\mathbf{b}_{j(q \times 1)} + \boldsymbol{\xi}_{j(k_j \times 1)}, j = 1, \dots, n$$

(indivíduo)

- $\mathbf{Y}_j = (Y_{j1}, \dots, Y_{jk_j})'$, k_j : número de condições de avaliação em que o indivíduo j é avaliado.
- \mathbf{X}_j : matriz de planejamento associada aos efeitos fixos para o indivíduo j (não-aleatória e conhecida).
- \mathbf{Z}_j : matriz de planejamento associada aos efeitos aleatórios para o indivíduo j (não-aleatória e conhecida).
- $\boldsymbol{\beta}$: vetor de efeitos fixos (não-aleatório e desconhecido).
- \mathbf{b}_j : vetor de efeitos aleatórios associado ao indivíduo j (aleatório e desconhecido), $\mathbf{b}_j \stackrel{ind.}{\sim} N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi})$.
- $\boldsymbol{\xi}_j$: vetor de erros associado ao indivíduo j , $\boldsymbol{\xi}_j \stackrel{ind.}{\sim} N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_j)$, $\mathbf{b}_j \perp \boldsymbol{\xi}_j, \forall i$.

Algumas propriedades do modelo

- $\mathcal{E}(\mathbf{Y}_j|\mathbf{b}_j) = \mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_j\mathbf{b}_j$.
- $\mathcal{E}(\mathbf{Y}_j) = \mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}$.
- $\text{Cov}(\mathbf{Y}_j|\mathbf{b}_j) = \boldsymbol{\Sigma}_j$.
- $\text{Cov}(\mathbf{Y}_j) = \mathbf{V}_j = \mathbf{Z}_j\boldsymbol{\Psi}\mathbf{Z}_j' + \boldsymbol{\Sigma}_j$.
- $\mathbf{Y}_j|\mathbf{b}_j \sim N_{k_j}(\mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_j\mathbf{b}_j, \boldsymbol{\Sigma}_j)$. Além disso, como

$$\mathbf{Y}_j|\mathbf{b}_j \sim N(\mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}_j\mathbf{b}_j, \boldsymbol{\Sigma}_j)$$

$$\mathbf{b}_j \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi})$$

portanto

$$\mathbf{Y}_j \sim N_{k_j}(\mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}, \mathbf{Z}_j\boldsymbol{\Psi}\mathbf{Z}_j' + \boldsymbol{\Sigma}_j)$$

Estruturas para as matrizes de covariância

- Diferentes escolhas para Ψ e Σ_j induzem diferentes estruturas de dependência para o vetor de respostas.
- Por exemplo, quando $\Sigma_j = \sigma^2 \mathbf{I}_{n_j}$, tem-se o modelo de independência condicional homocedástico. Modelos de independência condicional são bastante considerados em psicometria (Teoria de Resposta ao item).
- Dependendo da importância dos efeitos aleatórios para o estudo, podemos pensar em diferentes estruturas de covariância para eles.
- Existem diversas técnicas para sugestão/escolha de matrizes de covariâncias.

Cont.

- Não estruturada (NE)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 & \sigma_{34} \\ \sigma_{14} & \sigma_{24} & \sigma_{34} & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

- Auto-regressiva de ordem 1 (AR(1))

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Cont.

- Auto-regressiva com média móvel de ordem (1,1) (ARMA(1,1))

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \gamma & \gamma\rho & \gamma\rho^2 \\ \gamma & 1 & \gamma & \gamma\rho \\ \gamma\rho & \gamma & 1 & \gamma \\ \gamma\rho^2 & \gamma\rho & \gamma & 1 \end{bmatrix}$$

- Ante-dependência de ordem 1 (AD(1))

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_1 & \sigma_1\sigma_3\rho_1\rho_2 & \sigma_1\sigma_4\rho_1\rho_2\rho_3 \\ \sigma_1\sigma_2\rho_1 & \sigma_2^2 & \sigma_2\sigma_3\rho_2 & \sigma_2\sigma_4\rho_2\rho_3 \\ \sigma_1\sigma_3\rho_1\rho_2 & \sigma_2\sigma_3\rho_2 & \sigma_3^2 & \sigma_3\sigma_4\rho_3 \\ \sigma_1\sigma_4\rho_1\rho_2\rho_3 & \sigma_2\sigma_4\rho_2\rho_3 & \sigma_3\sigma_4\rho_3 & \sigma_4^2 \end{bmatrix}$$

Cont.

■ Uniforme (U)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2 + \tau & \tau & \tau & \tau \\ \tau & \sigma^2 + \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \sigma^2 + \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau & \sigma^2 + \tau \end{bmatrix}$$

■ Toeplitz (T)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1 & \sigma^2 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma^2 & \sigma_1 \\ \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Estimação

- Sob a ótica frequentista, em geral, trabalha-se com a distribuição marginal de \mathbf{Y} em relação à \mathbf{b} , ou seja $\mathbf{Y}_j \sim N(\mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}, \mathbf{Z}_j\boldsymbol{\Psi}\mathbf{Z}'_j + \boldsymbol{\Sigma}_j)$
- Alternativa: algoritmo EM utilizando a distribuição conjunta de (\mathbf{Y}, \mathbf{b}) .
- Também existem métodos Bayesianos.
- Suposição : $\boldsymbol{\Sigma}_j = g(\boldsymbol{\theta}_1)$ e $\boldsymbol{\Psi} = h(\boldsymbol{\theta}_2)$ de modo que $\boldsymbol{\theta}_1$ e $\boldsymbol{\theta}_2$ não possuem componentes comuns.

Cont.

- Log-verossimilhança (marginal), para n observações:

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}) &= -\frac{1}{2} \ln(2\pi) \sum_{j=1}^n k_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \ln |\mathbf{V}_i| \\ &\times -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta})' \mathbf{V}_i^{-1} (\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathbf{V}_i \equiv \mathbf{V}_i(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Z}_j \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\theta}_2) \mathbf{Z}_j' + \boldsymbol{\Sigma}_j(\boldsymbol{\theta}_1), \quad \boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1', \boldsymbol{\theta}_2')'$$

- Se $\boldsymbol{\theta}$ for conhecido, o estimador de MV de $\boldsymbol{\beta}$, são dados por:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_i' \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{X}_i \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_i' \mathbf{V}_i^{-1} \mathbf{Y}_i \right) \quad (2)$$

Cont.

- Para estimar (θ) , substituímos (2) em (1), obtendo uma log-verossimilhança perfilada:

$$\begin{aligned}l(\theta) &= -\frac{1}{2} \ln(2\pi) \sum_{j=1}^n k_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \ln |\mathbf{V}_j| \\ &\times -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i \hat{\beta})' \mathbf{V}_i^{-1} (\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_i \hat{\beta})\end{aligned}$$

- A maximização da log-verossimilhança (3) tem de ser feita através de métodos iterativos como os algoritmos de Newton-Raphson, Escore de Fisher, Gauss-Newton, BFGS.
- Uma vez que tais estimativas forem obtidas, as inserimos em (2).

Cont.

- As distribuições assintóticas dos estimadores podem ser obtidas através do TCL.
- Os erros-padrão assintóticos podem ser obtidos através das inversas das informações de Fisher.
- Os estimadores de MV para β são não viesados mas, o mesmo não acontece com os estimadores de MV de θ .
- Alternativa: estimadores de MV restritos (MVR) (também chamados de estimadores MV residuais).

Cont.

- MVR: consiste em maximizar a verossimilhança de uma transformação ortogonal do vetor de respostas, ou seja, da verossimilhança induzida por $\mathbf{Y}^* = \mathbf{U}\mathbf{Y}$, em que $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}'_1, \dots, \mathbf{Y}'_n)'$
- Em geral, $\mathbf{U} = \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$.
- Assim, $\mathbf{Y}^* \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{U}\mathbf{V}\mathbf{U}')$, em que $\mathbf{V} = \text{Cov}(\mathbf{Y})$.
- Os estimadores de MVR de β são não viesados enquanto que o viés do estimadores de MVR de θ são menores em comparação com os estimadores de MV.
- O nome “residual” vem do fato de que a matriz \mathbf{U} gera os resíduos no ajuste obtido por mínimos quadrados ordinários.

Cont.

- A log-verossimilhança residual ou restrita é dada por

$$\begin{aligned}l_R(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{1}{2} \ln(2\pi) \sum_{j=1}^n k_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |\mathbf{V}_j| \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\mathbf{Y}_j - \mathbf{X}_j \hat{\boldsymbol{\beta}} \right)' \mathbf{V}_j^{-1} \left(\mathbf{Y}_j - \mathbf{X}_j \hat{\boldsymbol{\beta}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln \left| \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j' \mathbf{V}_j^{-1} \mathbf{X}_j \right|\end{aligned}\tag{3}$$

em que $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ é dado em (2).

- Uma vez que os estimadores de MVR de $\boldsymbol{\theta}$ forem obtidos, maximizando-se (3) (numericamente), os estimadores de MVR de $\boldsymbol{\beta}$ podem ser obtidos inserindo aqueles em (2).

Cont.

- As distribuições assintóticas dos estimadores de MVR podem ser obtidas de modo semelhante aos dos estimadores de MV.
- Preditores para os efeitos aleatórios podem ser obtidos maximizando-se a distribuição conjunta de $(\mathbf{Y}', \mathbf{b}')'$ em relação à \mathbf{b} , ou seja, maximizando-se (em relação à \mathbf{b})

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{b}) \propto \exp \left[-0,5 \sum_{j=1}^n (\mathbf{Y}_j - \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}_j \mathbf{b}_j)' \boldsymbol{\Sigma}_j (\mathbf{Y}_j - \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta} - \mathbf{Z}_j \mathbf{b}_j) \right] \\ \times \exp \left[-0,5 \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_j' \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{b}_j \right]$$

Cont.

- Tais preditores são dados por:

$$\hat{\mathbf{b}}_j = \hat{\Psi} \mathbf{Z}_j' \hat{\Sigma}_j^{-1} (\mathbf{Y}_j - \mathbf{X}_j \hat{\beta})$$

em que $\hat{\Psi} \equiv \Psi(\hat{\theta}_2)$, $\hat{\Sigma}_j \equiv \Sigma_j(\hat{\theta}_1)$ e $\hat{\beta}$ e $\hat{\theta} = (\hat{\theta}'_1, \hat{\theta}'_2)'$ são os estimadores de MV ou MVR de β e θ , respectivamente.

Intervalos de Confiança

- Seja $\hat{\vartheta}$ o componente de interesse do vetor $\hat{\beta}$ ou do vetor $\hat{\theta}$ e $\widehat{EP}(\hat{\vartheta})$ um estimador (consistente) do respectivo erro-padrão.
- IC assintótico com coeficiente de confiança de γ

$$\hat{\vartheta} \pm z_{(1+\gamma)/2} \widehat{EP}(\hat{\vartheta})$$

$$P(Z \leq z_{(1+\gamma)/2}) = \frac{1+\gamma}{2}$$

Testes de Hipótese

- Seja $\widehat{V}(\widehat{\beta})$ um estimador consistente da matriz de covariâncias de β .
- Desejamos testar $H_0 : \mathbf{C}\beta = \mathbf{M}$ vs $H_1 : \mathbf{C}\beta \neq \mathbf{M}$
- Podemos usar a seguintes estatística (do tipo Wald)

$$Q = (\mathbf{C}\widehat{\beta} - \mathbf{M})' \left(\mathbf{C}\widehat{V}(\widehat{\beta})\mathbf{C}' \right)^{-1} (\mathbf{C}\widehat{\beta} - \mathbf{M})$$

para n suficientemente grande, temos que $Q \sim \chi^2_{(r(\mathbf{C}), \delta)}$,

$$\delta = (\mathbf{C}\beta - \mathbf{M})' \left(\mathbf{C}V(\beta)\mathbf{C}' \right)^{-1} (\mathbf{C}\beta - \mathbf{M})$$

Comentários

- Em relação aos testes de hipótese para θ , podemos proceder de modo análogo ao que fizemos para β .
- Note, contudo, que existem três tipos de parâmetros em θ : parâmetros de variância (σ^2), de correlação (ρ) e de covariância (σ_1). Para os parâmetros de variância, faz-se necessário testes mais específicos quando $M = 0$.
- Para maiores detalhes, veja as referências.
- Voltemos ao conjunto de dados reais.
- Primeiramente, vamos ajustar o modelo 1 sob independência.

Médias condicionais do modelo 1

- $\mu_{ij} = \mathcal{E}(Y_{ijk} | x_{ijk} = \bar{x}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$. Grupo de referência (MT e Sessão 1).

$$\mu_{11} = \mu$$

$$\mu_{12} = \mu + \beta_2$$

$$\mu_{13} = \mu + \beta_3$$

$$\mu_{14} = \mu + \beta_4$$

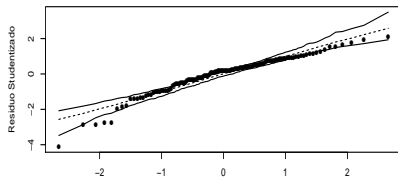
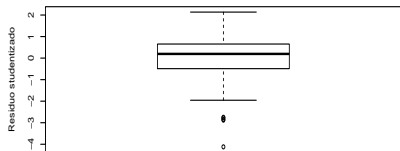
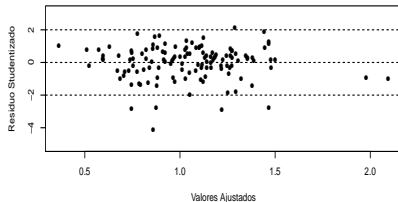
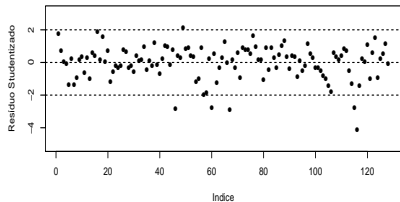
$$\mu_{21} = \mu + \alpha_2$$

$$\mu_{22} = \mu + \alpha_2 + \beta_2 + (\alpha\beta)_{22}$$

$$\mu_{23} = \mu + \alpha_2 + \beta_3 + (\alpha\beta)_{23}$$

$$\mu_{24} = \mu + \alpha_2 + \beta_4 + (\alpha\beta)_{24}$$

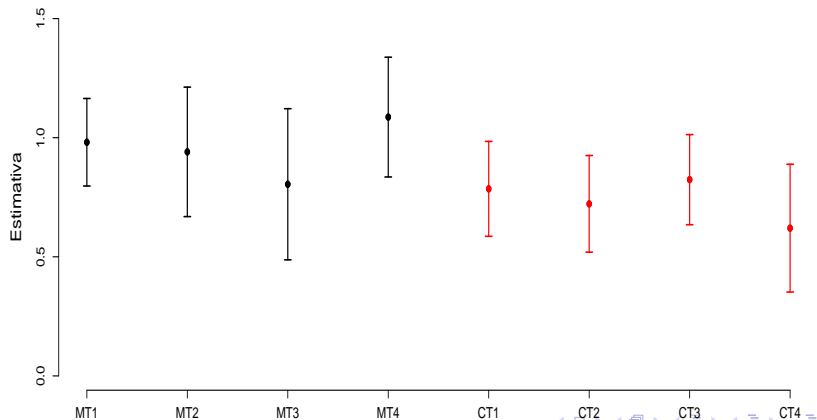
Modelo 1 (sob a suposição de independência)



Ajuste do modelo

Parâmetro	Est.	EP	IC (95%)	Estat. t	p-valor
μ	1,15	0,03	[1,08 ; 1,21]	33,95	<0,0001
α_2	-0,15	0,05	[-0,24 ; -0,05]	-3,07	0,0027
β_2	-0,01	0,05	[-0,11 ; 0,09]	-0,20	0,8423
β_3	-0,08	0,05	[-0,18 ; 0,02]	-1,51	0,1345
β_4	-0,06	0,05	[-0,15 ; 0,04]	-1,15	0,2517
$(\alpha\beta)_{22}$	-0,10	0,07	[-0,23 ; 0,04]	-1,41	0,128
$(\alpha\beta)_{23}$	0,08	0,07	[-0,06 ; 0,22]	1,15	0,2544
$(\alpha\beta)_{24}$	0,13	0,07	[-0,01 ; 0,28]	1,83	0,0696
γ_{11}	0,98	0,09	[0,80 ; 1,16]	10,58	<0,0001
γ_{12}	0,94	0,14	[0,67 ; 1,21]	6,86	<0,0001
γ_{13}	0,80	0,16	[0,49 ; 1,12]	5,02	<0,0001
γ_{14}	1,09	0,13	[0,84 ; 1,34]	8,57	<0,0001
γ_{21}	0,79	0,10	[0,59 ; 0,98]	7,81	<0,0001
γ_{22}	0,72	0,10	[0,52 ; 0,93]	7,06	<0,0001
γ_{23}	0,82	0,10	[0,63 ; 1,01]	8,63	<0,0001
γ_{24}	0,62	0,14	[0,35 ; 0,89]	4,58	<0,0001

Modelo 1: estimativas pontuais e intervalares dos parâmetros γ



Testes de interesse $C\beta = 0$

- Estatística e p-valor entre parênteses.
- Ausência de interação (tipo de escova e sessão): 3,77 (0,0128)
- Nulidade dos parâmetros β : 1,03 (0,3817)
- Igualdade entre os coeficientes γ ao longo das sessões para MT: 0,66 (0,5803)
- Igualdade entre os coeficientes γ ao longo das sessões para CT: 0,57 (0,6371)
- Igualdade entre a média dos coeficientes γ (ao longo das sessões) CT com MT: 195,85 ($< 0,0001$)
- Outra forma de testar. Ajustar modelos com as restrições e compará-los via AIC, BIC ou TRV (se forem encaixados).

Modelo reduzido 1

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \delta_{ik} + \gamma_i(x_{ijk} - \bar{x}) + \xi_{ijk},$$

$i = 1, 2$ (tipo de escova), $k = 1, 2, 3, 4$ (sessão), $j = 1, 2, \dots, 16$ (indivíduo)

- $\alpha_1 = \delta_{1k} = \delta_{i1} = 0, \forall i, k$
- x_{ijk} : é o IPB do indivíduo j , submetido ao tipo de escova i , na sessão k , antes da escovação e $\bar{x} = \frac{1}{128} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^{16} x_{ijk}$.
- Y_{ijk} : é o IPB do indivíduo j , submetido ao tipo de escova i , na sessão k , depois da escovação.
- $E(Y_{ijk} | x_{ijk} = \bar{x}) = \mu + \alpha_i + \delta_{ik}$.
- γ_i : é o aumento do IPB pós escovação para indivíduos submetidos ao tipo de escova i (independentemente da sessão), para o aumento em uma unidade no IPB pré escovação.

Médias condicionais do modelo reduzido 1

- $\mu_{ij} = \mathcal{E}(Y_{ijk} | x_{ijk} = \bar{x}) = \mu + \alpha_i + \delta_{ij}$. Grupo de referência (MT e Sessão 1).

$$\mu_{11} = \mu$$

$$\mu_{12} = \mu$$

$$\mu_{13} = \mu$$

$$\mu_{14} = \mu$$

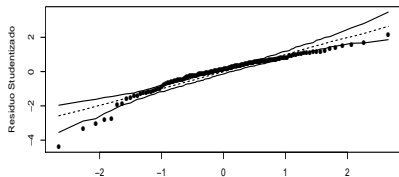
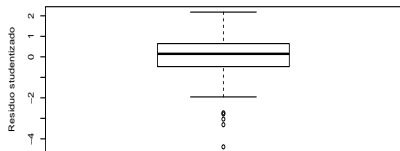
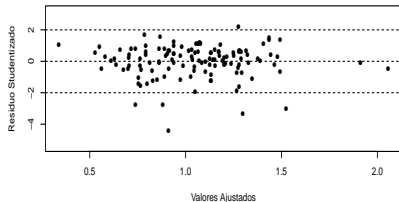
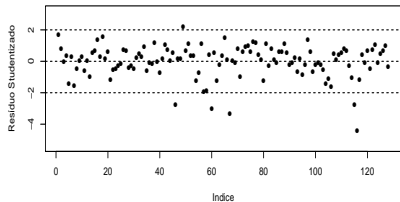
$$\mu_{21} = \mu + \alpha_2$$

$$\mu_{22} = \mu + \alpha_2 + \delta_{22}$$

$$\mu_{23} = \mu + \alpha_2 + \delta_{23}$$

$$\mu_{24} = \mu + \alpha_2 + \delta_{24}$$

Modelo 1 (sob a suposição de independência)



Ajuste do modelo

Parâmetro	Est.	EP	Estat. t	p-valor
μ	1,1166	0,0169	66,20	<0,0001
α_2	-0,1181	0,0374	-3,16	0,0020
δ_{22}	-0,1069	0,0472	-2,27	0,0252
δ_{23}	0,0021	0,0471	0,04	0,9649
δ_{24}	0,0516	0,0486	1,06	0,2902
γ_1	0,9723	0,0586	16,58	<0,0001
γ_2	0,7552	0,0522	14,48	<0,0001

Modelo reduzido 2

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \delta_{22} + \gamma_i(x_{ijk} - \bar{x}) + \xi_{ijk},$$

$i = 1, 2$ (tipo de escova), $k = 1, 2, 3, 4$ (sessão), $j = 1, 2, \dots, 16$ (indivíduo)

- $\alpha_1 = 0$
- x_{ijk} : é o IPB do indivíduo j , submetido ao tipo de escova i , na sessão k , antes da escovação e $\bar{x} = \frac{1}{128} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^{16} x_{ijk}$.
- Y_{ijk} : é o IPB do indivíduo j , submetido ao tipo de escova i , na sessão k , depois da escovação.
- $E(Y_{ijk} | x_{ijk} = \bar{x}) = \mu + \alpha_i + \delta_{22}$.
- γ_i : é o aumento do IPB pós escovação para indivíduos submetidos ao tipo de escova i (independentemente da sessão), para o aumento em uma unidade no IPB pré escovação.

Médias condicionais do modelo reduzido 2

- $\mu_{ij} = \mathcal{E}(Y_{ijk} | x_{ijk} = \bar{x}) = \mu + \alpha_i + \delta_{22}$. Grupo de referência (MT e Sessão 1).

$$\mu_{11} = \mu$$

$$\mu_{12} = \mu$$

$$\mu_{13} = \mu$$

$$\mu_{14} = \mu$$

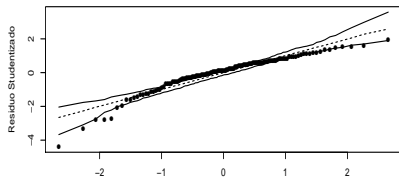
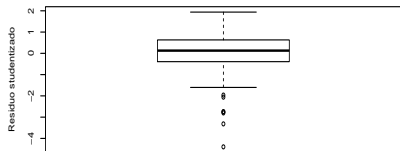
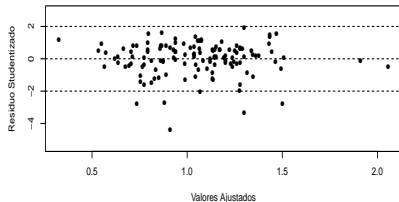
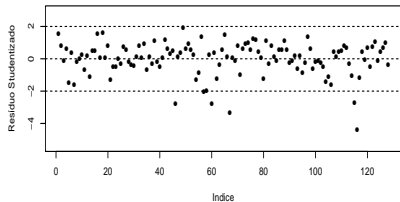
$$\mu_{21} = \mu + \alpha_2$$

$$\mu_{22} = \mu + \alpha_2 + \delta_{22}$$

$$\mu_{23} = \mu + \alpha_2$$

$$\mu_{24} = \mu + \alpha_2$$

Modelo 2 (sob a suposição de independência)



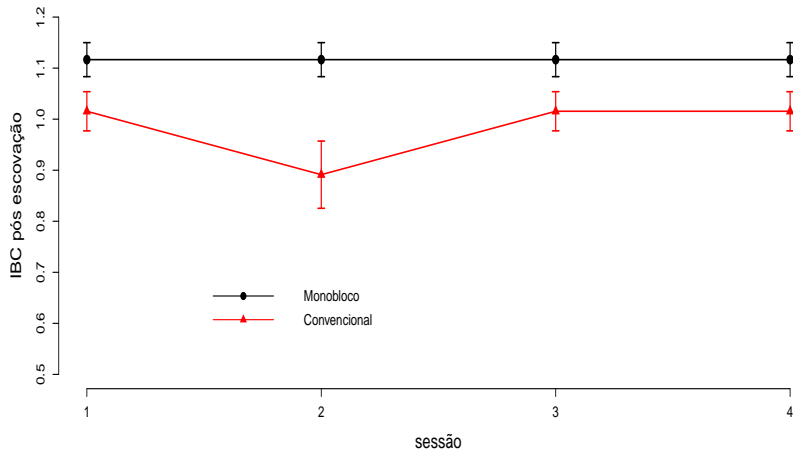
Ajuste do modelo

Parâmetro	Est.	EP	IC95%)	Estat. t	p-valor
μ	1,12	0,02	[1,08 ; 1,15]	66,35	<0,0001
α_2	-0,10	0,03	[-0,15 ; -0,05]	-3,94	0,0001
δ_{22}	-0,12	0,04	[-0,20 ; -0,05]	-3,23	0,0016
γ_1	0,97	0,06	[0,86 ; 1,09]	16,62	<0,0001
γ_2	0,77	0,05	[0,67 ; 0,87]	15,48	<0,0001

Médias condicionais ajustadas

Tipo de escova	Sessão	Est.	EP	IC (95%)
MT	1,2,3,4	1,12	0,02	[1,08 ; 1,15]
CT	2	0,89	0,03	[0,83 ; 0,96]
	1,3,4	1,02	0,02	[0,98 ; 1,05]

Perfis condicionais ajustados (modelo 2)



Análise via modelos mistos

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_k + (\alpha\beta)_{ik} + \gamma_{ik}(x_{ijk} - \bar{x}) + b_{ij} + \xi_{ijk},$$

$i = 1, 2$ (tipo de escova), $k = 1, 2, 3, 4$ (sessão), $j = 1, 2, \dots, 16$ (indivíduo)

- $\alpha_1 = \beta_1 = (\alpha\beta)_{1k} = (\alpha\beta)_{i1} = 0, \forall i, k$
- x_{ijk} : é o IPB do indivíduo j , submetido ao tipo de escova i , na sessão k , antes da escovação e $\bar{x} = \frac{1}{128} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^{16} x_{ijk}$.
- Y_{ijk} : é o IPB do indivíduo j , submetido ao tipo de escova i , na sessão k , depois da escovação.
- $E(Y_{ijk} | x_{ijk} = \bar{x}) = \mu + \alpha_i + \beta_k + (\alpha\beta)_{ik}$.
- γ_{ik} : é o aumento do IPB pós escovação para indivíduos submetidos ao tipo de escova i na sessão k , para o aumento em uma unidade no IPB pré escovação.

Análise via modelos mistos

- Consideraremos $b_{ij} \stackrel{ind.}{\sim} N(0, \psi)$.
- Note que teremos $\mathbf{Z}_{ij(4 \times 1)} = \mathbf{1}_{(4 \times 1)}$
- Vamos propor diferentes estruturas para Σ_j .
- Lembremos que as variâncias, aparentemente, são diferentes entre os grupos e ao longo das sessões.
- Além disso, há, em geral, um padrão de correlação serial.

Modelos

■ Modelo 1

- $\xi_{ij} \sim N_4(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_4)$.
- $\text{Cov}(\mathbf{Y}_{ij}) = \psi \mathbf{J}_4 + \sigma^2 \mathbf{I}_4$, em que $\mathbf{J}_4 = \mathbf{1}\mathbf{1}'$.

■ Modelo 2

- $\xi_{ij} \sim N_4(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{\Sigma})$.
- $\text{Cov}(\mathbf{Y}_{ij}) = \psi \mathbf{J}_4 + \sigma^2 \mathbf{\Sigma}$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Modelos

■ Modelo 3

- $\xi_{ij} \sim N_4(\mathbf{0}, \sigma_i^2 \mathbf{I}_4)$.
- $\text{Cov}(\mathbf{Y}_{ij}) = \psi \mathbf{J}_4 + \sigma_i^2 \mathbf{I}_4$, em que $\mathbf{J}_4 = \mathbf{1}\mathbf{1}'$.

■ Modelo 4

- $\xi_{ij} \sim N_4(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{\Sigma})$.
- $\text{Cov}(\mathbf{Y}_{ij}) = \psi \mathbf{J}_4 + \sigma_i^2 \mathbf{\Sigma}$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Modelos

■ Modelo 5

■ $\xi_{ij} \sim N_4(\mathbf{0}, \Sigma)$.

■ $\text{Cov}(\mathbf{Y}_{ij}) = \psi \mathbf{J}_4 + \Sigma$, em que $\Sigma =$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{i1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{i2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{i3}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{i4}^2 \end{bmatrix}.$$

■ Modelo 6

■ $\xi_{ij} \sim N_4(\mathbf{0}, \Sigma)$.

■ $\text{Cov}(\mathbf{Y}_{ij}) = \psi \mathbf{J}_4 + \Sigma =$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{i1}^2 & \sigma_{i1}\sigma_{i2}\rho & \sigma_{i1}\sigma_{i3}\rho^2 & \sigma_{i1}\sigma_{i4}\rho^3 \\ \sigma_{i1}\sigma_{i2}\rho & \sigma_{i2}^2 & \sigma_{i2}\sigma_{i3}\rho & \sigma_{i2}\sigma_{i4}\rho^2 \\ \sigma_{i1}\sigma_{i3}\rho^2 & \sigma_{i2}\sigma_{i3}\rho & \sigma_{i3}^2 & \sigma_{i3}\sigma_{i4}\rho \\ \sigma_{i1}\sigma_{i4}\rho^3 & \sigma_{i2}\sigma_{i4}\rho^2 & \sigma_{i3}\sigma_{i4}\rho & \sigma_{i4}^2 \end{bmatrix}$$

Comparação entre os modelos

Modelo	Estrutura	AIC	BIC
Modelo 0	Ind.	-132,52	-84,03
Modelo 1	U	-78,52	-29,59
Modelo 2	AR1	-77,23	-25,58
Modelo 3	UH por tipo de escova	-76,60	-24,95
Modelo 4	ARH1 por tipo de escova	-75,24	-20,87
Modelo 5	UH por tipo de escova*sessão	-76,82	-8,86
Modelo 6	ARH1 por tipo de escova*sessão	-75,05	-4,37

U: Uniforme, UH: Uniforme heterocedástico, AR1: auto-regressivo de ordem 1, ARH1: auto-regressivo heterocedástico de ordem 1

Comentários

- Os valores negativos do AIC e BIC devem-se ao fato de que as logverossimilhanças são positivas.
- Em geral, espera-se que modelos que contemplam estruturas de dependência existente nos dados, sejam escolhidos.
- Em parte, o comportamento favorável ao modelo que considera independência dos dados deve-se ao fato de que os modelos não se ajustaram bem aos dados.
- Como ilustração seguiremos a análise com o modelo 1 (o modelo que apresentou os menores valores para as estatísticas entre os modelos mistos).

Ajuste do modelo

Parâmetro	Est.	EP	IC (95%)	Estat. z	p-valor
μ	1,15	0,03	[1,09 ; 1,21]	38,33	<0,0001
α_2	-0,15	0,05	[-0,25 ; -0,05]	-3,00	0,0027
β_2	-0,02	0,04	[-0,10 ; 0,06]	-0,50	0,6171
β_3	-0,08	0,04	[-0,16 ; <-0,01]	-2,00	0,0455
β_4	-0,05	0,04	[-0,13 ; 0,03]	-1,25	0,2113
$(\alpha\beta)_{22}$	-0,09	0,06	[-0,21 ; 0,03]	-1,50	0,1336
$(\alpha\beta)_{23}$	0,09	0,06	[-0,03 ; 0,21]	1,50	0,1336
$(\alpha\beta)_{24}$	0,13	0,06	[0,01 ; 0,25]	2,17	0,0300
γ_{11}	0,95	0,09	[0,77 ; 1,13]	10,56	<0,0001
γ_{12}	0,86	0,13	[0,61 ; 1,11]	6,62	<0,0001
γ_{13}	0,73	0,15	[0,44 ; 1,02]	4,87	<0,0001
γ_{14}	1,00	0,12	[0,76 ; 1,24]	8,33	<0,0001
γ_{21}	0,73	0,09	[0,55 ; 0,91]	8,11	<0,0001
γ_{22}	0,71	0,10	[0,51 ; 0,91]	7,10	<0,0001
γ_{23}	0,80	0,09	[0,62 ; 0,98]	8,89	<0,0001
γ_{24}	0,63	0,13	[0,38 ; 0,88]	4,85	<0,0001

Testes de interesse $C\beta = 0$

- Estatística e p-valor entre parênteses.
- Ausência de interação (tipo de escova e sessão): 13,97 (0,0029)
- Nulidade dos parâmetros β : 4,33 (0,2283)
- Igualdade entre os coeficientes γ ao longo das sessões para MT: 2,57 (0,4633)
- Igualdade entre os coeficientes γ ao longo das sessões para CT: 1,34 (0,7186)
- Igualdade entre a média dos coeficientes γ (ao longo das sessões) CT com MT: 285,75 ($< 0,0001$)
- Outra forma de testar. Ajustar modelos com as restrições e compará-los via AIC, BIC ou TRV (se forem encaixados).

Modelo reduzido 1

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \delta_{ik} + \gamma_i(x_{ijk} - \bar{x}) + b_{ij} + \xi_{ijk},$$

$i = 1, 2$ (tipo de escova), $k = 1, 2, 3, 4$ (sessão), $j = 1, 2, \dots, 16$ (indivíduo)

- $\alpha_1 = \delta_{1k} = \delta_{i1} = 0, \forall i, k$
- x_{ijk} : é o IPB do indivíduo j , submetido ao tipo de escova i , na sessão k , antes da escovação e $\bar{x} = \frac{1}{128} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^{16} x_{ijk}$.
- Y_{ijk} : é o IPB do indivíduo j , submetido ao tipo de escova i , na sessão k , depois da escovação.
- $E(Y_{ijk} | x_{ijk} = \bar{x}) = \mu + \alpha_i + \delta_{ik}$.
- γ_i : é o aumento do IPB pós escovação para indivíduos submetidos ao tipo de escova i (independentemente da sessão), para o aumento em uma unidade no IPB pré escovação.

Médias condicionais do modelo reduzido 1

- $\mu_{ij} = \mathcal{E}(Y_{ijk} | x_{ijk} = \bar{x}) = \mu + \alpha_i + \delta_{ij}$. Grupo de referência (MT e Sessão 1).

$$\mu_{11} = \mu$$

$$\mu_{12} = \mu$$

$$\mu_{13} = \mu$$

$$\mu_{14} = \mu$$

$$\mu_{21} = \mu + \alpha_2$$

$$\mu_{22} = \mu + \alpha_2 + \delta_{22}$$

$$\mu_{23} = \mu + \alpha_2 + \delta_{23}$$

$$\mu_{24} = \mu + \alpha_2 + \delta_{24}$$

Ajuste do modelo

Parâmetro	Est.	EP	IC(95%)	Estat. z	p-valor
μ	1,11	0,02	[1,07 ; 1,15]	55,50	<0,0001
α_2	-0,12	0,04	[-0,20 ; -0,04]	-3,00	0,0027
$(\delta)_{22}$	-0,11	0,04	[-0,19 ; -0,03]	-2,75	0,0060
$(\delta)_{23}$	0,00	0,04	[-0,08 ; 0,08]	0,00	>0,9999
$(\delta)_{24}$	0,06	0,04	[-0,02 ; 0,14]	1,50	0,1336
γ_1	0,92	0,07	[0,78 ;1,06]	13,14	<0,0001
γ_2	0,73	0,06	[0,61 ;0,85]	12,17	<0,0001

Modelo reduzido 2

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \delta_{22} + \gamma_i(x_{ijk} - \bar{x}) + b_{ij} + \xi_{ijk},$$

$i = 1, 2$ (tipo de escova), $k = 1, 2, 3, 4$ (sessão), $j = 1, 2, \dots, 16$ (indivíduo)

- $\alpha_1 = 0$
- x_{ijk} : é o IPB do indivíduo j , submetido ao tipo de escova i , na sessão k , antes da escovação e $\bar{x} = \frac{1}{128} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^{16} x_{ijk}$.
- Y_{ijk} : é o IPB do indivíduo j , submetido ao tipo de escova i , na sessão k , depois da escovação.
- $E(Y_{ijk} | x_{ijk} = \bar{x}) = \mu + \alpha_i + \delta_{22}$.
- γ_i : é o aumento do IPB pós escovação para indivíduos submetidos ao tipo de escova i (independentemente da sessão), para o aumento em uma unidade no IPB pré escovação.

Médias condicionais do modelo reduzido 2

- $\mu_{ij} = \mathcal{E}(Y_{ijk} | x_{ijk} = \bar{x}) = \mu + \alpha_i + \delta_{22}$. Grupo de referência (MT e Sessão 1).

$$\mu_{11} = \mu$$

$$\mu_{12} = \mu$$

$$\mu_{13} = \mu$$

$$\mu_{14} = \mu$$

$$\mu_{21} = \mu + \alpha_2$$

$$\mu_{22} = \mu + \alpha_2 + \delta_{22}$$

$$\mu_{23} = \mu + \alpha_2$$

$$\mu_{24} = \mu + \alpha_2$$

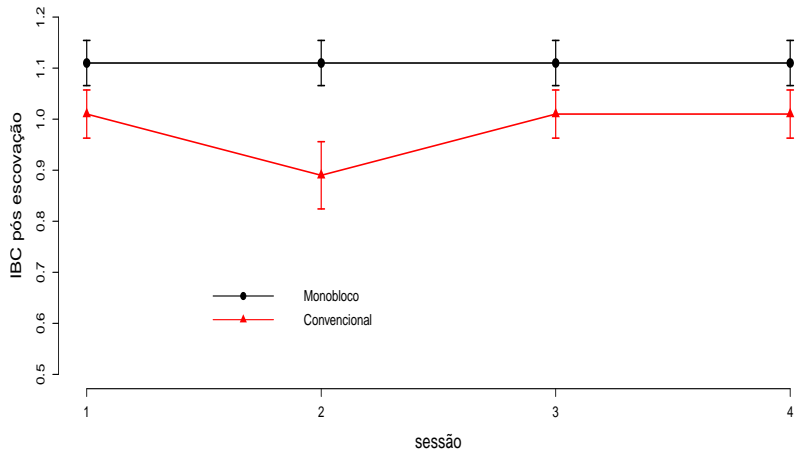
Ajuste do modelo

Parâmetro	Est.	EP	IC(95%)	Estat. z	p-valor
μ	1,11	0,02	[1,07 ; 1,15]	55,50	<0,0001
α_2	-0,10	0,03	[-0,16 ; -0,04]	-3,33	<0,0001
δ_{22}	-0,12	0,03	[-0,18 ; -0,06]	-4,00	<0,0001
γ_1	0,92	0,07	[0,78 ;1,06]	13,14	<0,0001
γ_2	0,76	0,05	[0,66 ;0,86]	15,20	<0,0001

Médias condicionais ajustadas

Tipo de escova	Sessão	Est.	EP	IC (95%)
MT	1,2,3,4	1,11	0,02	[1,07 ; 1,15]
CT	2	0,89	0,03	[0,82 ; 0,96]
	1,3,4	1,01	0,02	[0,96 ; 1,06]

Perfis condicionais ajustados (modelo 2)



Análise de resíduos para modelos mistos

- Existem duas fontes de variação: os efeitos aleatórios \mathbf{b} e os erros (marginais) ξ .

Análise de resíduos para modelos mistos

- Existem duas fontes de variação: os efeitos aleatórios \mathbf{b} e os erros (marginais) ξ .
- Tipos de erros:
 - Erros condicionais: $\xi = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta - \mathbf{Zb}$
 - Erros marginais: $\epsilon = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta = \mathbf{Zb} + \xi$
 - Efeitos aleatórios: $\mathbf{Zb} = \mathcal{E}(\mathbf{Y}|\mathbf{b}) - \mathcal{E}(\mathbf{Y})$.

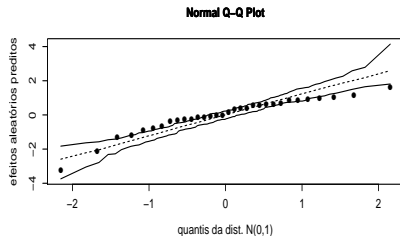
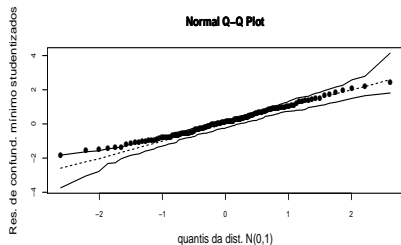
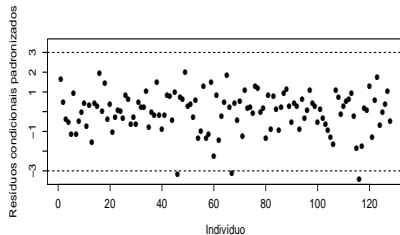
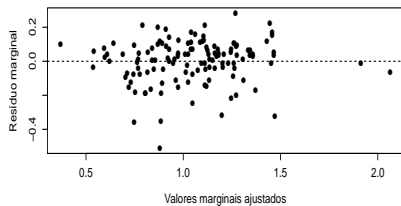
Análise de resíduos para modelos mistos

- Existem duas fontes de variação: os efeitos aleatórios \mathbf{b} e os erros (marginais) ξ .
- Tipos de erros:
 - Erros condicionais: $\xi = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta - \mathbf{Zb}$
 - Erros marginais: $\epsilon = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta = \mathbf{Zb} + \xi$
 - Efeitos aleatórios: $\mathbf{Zb} = \mathcal{E}(\mathbf{Y}|\mathbf{b}) - \mathcal{E}(\mathbf{Y})$.
- Respectivos resíduos (valores preditos):
 - Resíduos condicionais: $\hat{\xi} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta} - \mathbf{Z}\hat{\mathbf{b}}$
 - Resíduos marginais: $\hat{\epsilon} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{b}} + \hat{\xi}$
 - Efeitos aleatórios preditos: $\mathbf{Z}\hat{\mathbf{b}}$.

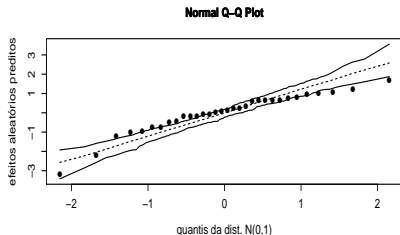
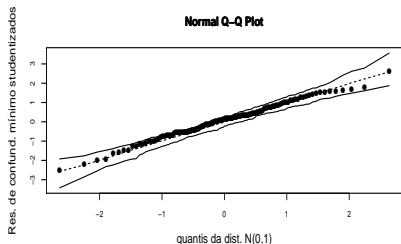
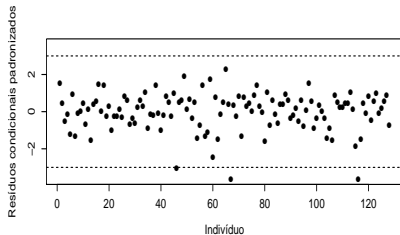
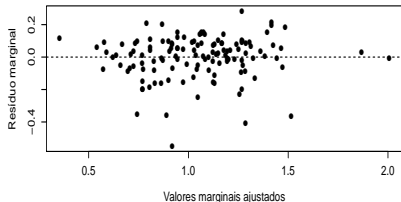
Utilização dos resíduos e valores preditos

- Os efeitos aleatórios preditos (devidamente padronizados): gráfico de quantis-quantis para verificar a normalidade.
- Resíduos marginais x valores preditos marginais: verificar o relacionamento entre a resposta e a parte sistemática.
- Resíduos condicionais padronizados x índices: “outliers” em termos da variável resposta.
- Resíduos de confundimento mínimo (veja Nobre, 2004): gráfico de quantis-quantis para verificar a normalidade do erro marginal.

Gráficos de resíduos modelo misto completo



Gráficos de resíduos modelo misto reduzido 1



Gráficos de resíduos modelo misto reduzido 2

