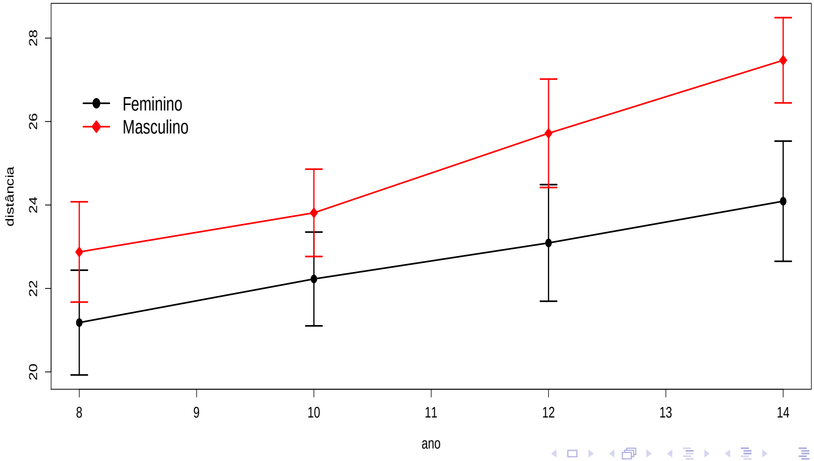
Modelos lineares mistos: parte 3

Prof. Caio Azevedo

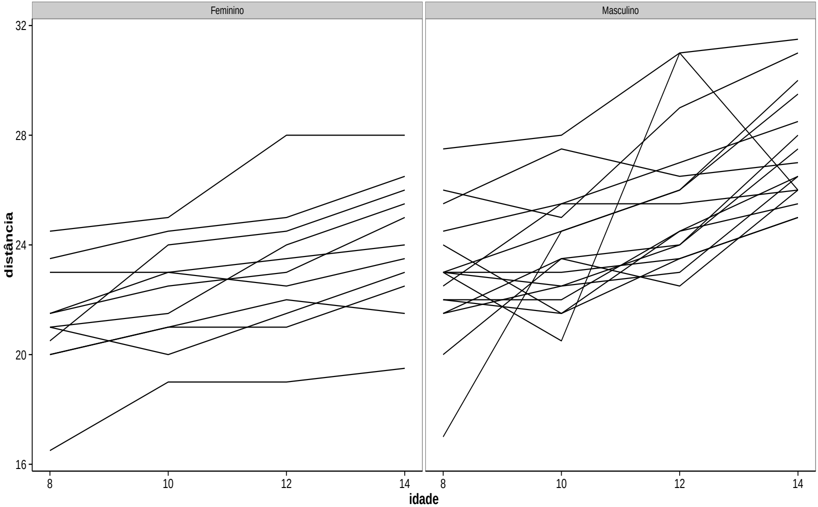
Voltando ao Exemplo 2: dados de Potthoff and Roy

- Este conjunto de dados corresponde aos famosos dados de Potthoff-Roy, usado para demonstrar a utilização da MANOVA em dados de medidas repetidas (comparação entre grupos, embora comparação entre variáveis seja possível).
- O estudo considerou 16 meninos e 11 meninas, nos quais, nas idades 8, 10, 12 e 14 anos tiveram a distância (mm) do centro da glândula pituitária para a fissura pterigomaxilar medidas.

Perfis médios



Perfis individuais



Modelagem para os dados do Exemplo 2

$$Y_{ijk} = \mu_{ijk} + \xi_{ijk},$$

$j = 1, 2, ..., n_{ik}$, (indivíduo), $i = 1, 2, 3, 4$ (ano (condição de avaliação)), $k = 1, 2$(gênero - 1: feminino, 2:masculino), $n_{i1} = 11; n_{i2} = 16, \forall i$

- (1) $\mu_{ijk} = \beta_0 + \alpha_k + (\beta_1 + \gamma_k)(x_{ijk} - 8) + b_{jk}$;(2) $\mu_{ijk} = \beta_0 + \alpha_k + (\beta_1 + \gamma_k)(x_{ijk} - 8) + b_{1jk} + b_{2jk}x_{ijk}$.
- (1) : $\mathcal{V}(Y_{ijk}) = \sigma^2$ (homocedástico); (2)$\mathcal{V}(Y_{ijk}) = \sigma_i^2 = \sigma^2\delta_k^2$, $\delta_1 \equiv 1$ (heterocedástico).
- $Corre(Y_{ijk}, Y_{i'jk})$: Uniforme.
- Defina: $\boldsymbol{b}_{jk} = b_{1jk}$ ou ($\boldsymbol{b}_{jk} = (b_{1jk}, b_{2jk})$); $b_{1jk} \overset{i.i.d}{\sim} N_1(0, \psi_1)$, ou $(b_{1jk}, b_{2jk}) \overset{i.i.d}{\sim} N_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Psi}), \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_0 \\ \psi_0 & \psi_2 \end{bmatrix}$.

Modelagem para os dados do Exemplo 2 (cont.)

- (Esperança marginal): $E(Y_{ijk})$.
- $E(Y_{ijk}|x_{ijk} = 8) = \beta_0$: é a distância esperada marginal no oitavo ano de vida para indivíduos do gênero feminino.
- α_2 é o incremento na distância esperada marginal no oitavo ano de vida para indivíduos do gênero masculino em relação aos do gênero feminino.
- β_1 : é o incremento na distância esperada marginal no intervalo de um ano para indivíduos do gênero feminino.
- γ_2 : é o incremento na distância esperada marginal no intervalo de um ano para indivíduos do gênero masculino em relação ao incremento para indivíduos do gênero feminino.

Modelos

Modelo	Variância	Correlação	Efeitos aleatórios
HUI	Homocedástico	U	intercepto
HUICA	Homocedástico	U	intercepto, coeficiente angular
HEUI	Heterocedástico	U	intercepto
HEUICA	Heterocedástico	U	intercepto, coeficiente angular

Modelos

Modelo	AIC	BIC
HUI	447,76	466,27
HUICA	450,58	474,38
HEUI	**430,91**	**452,06**
HEUICA	431,29	457,73

O MMM selecionado foi HE2U (mesmo modelo mas sem os efeitos aleatórios): AIC= 436,19; BIC=454,70.

Estimativas dos parâmetros (modelo completo)

Parâmetro	Estimativa	EP	IC(95%)	Estatística	p-valor
β_0	21,21	0,61	[20,00 ; 22,42]	34,94	$< 0{,}0001$
α_2	1,41	0,83	[-0,30 ; 3,11]	1,70	0,0890
β_1	0,48	0,05	[0,37 ; 0,58]	9,12	$< 0{,}0001$
γ_2	0,30	0,11	[0,09 ; 0,52]	2,83	0,00046

Ajustar um modelo reduzido (U com heterocedasticidade (2)) sem o parâmetro α_2, ou seja:

$$Y_{ijk} = \beta_0 + (\beta_1 + \gamma_k)(x_{ijk} - 8) + \xi_{ijk} + b_{1jk} + \xi_{ijk},$$

Estimativas dos parâmetros

MLM

Parâmetro	Estimativa	EP	IC(95%)	Estatística	p-valor
β_0	21,97	0,42	[21,13 ; 22,81]	51,93	$< 0{,}0001$
β_1	0,46	0,05	[0,36 ; 0,57]	8,96	$< 0{,}0001$
γ_2	0,37	0,10	[0,17 ; 0,57]	3,74	0,0002

MMM

Parâmetro	Estimativa	EP	IC(95%)	Estatística	p-valor
β_0	21,67	0,42	[20,83 ; 22,51]	51,14	$< 0{,}0001$
β_1	0,46	0,06	[0,34 ; 0,58]	7,79	$< 0{,}0001$
γ_2	0,36	0,10	[0,17 ; 0,56]	3,66	$< 0{,}0001$

Estimativas dos parâmetros

MLM

Parâmetro	Estimativa	IC(95%)
σ^2	0,46	[0,28 ; 0,75]
δ	2,15	[1,57 ; 2,96]
ψ_1	4,02	[2,31 ; 6,98]

MMM

Parâmetro	Estimativa	IC(95%)
σ^2	3,17	[1,92 ; 5,23]
δ	1,74	[1,29 ; 2,34]

Estimativas dos parâmetros

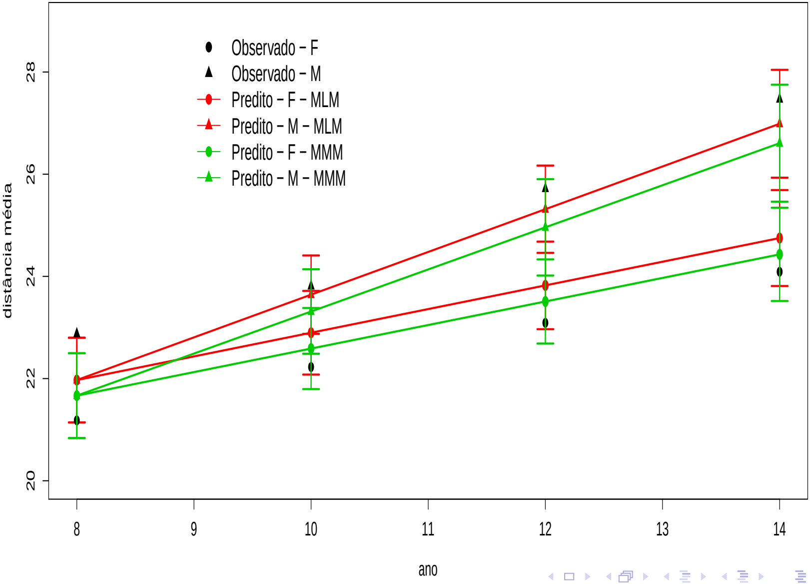
MLM

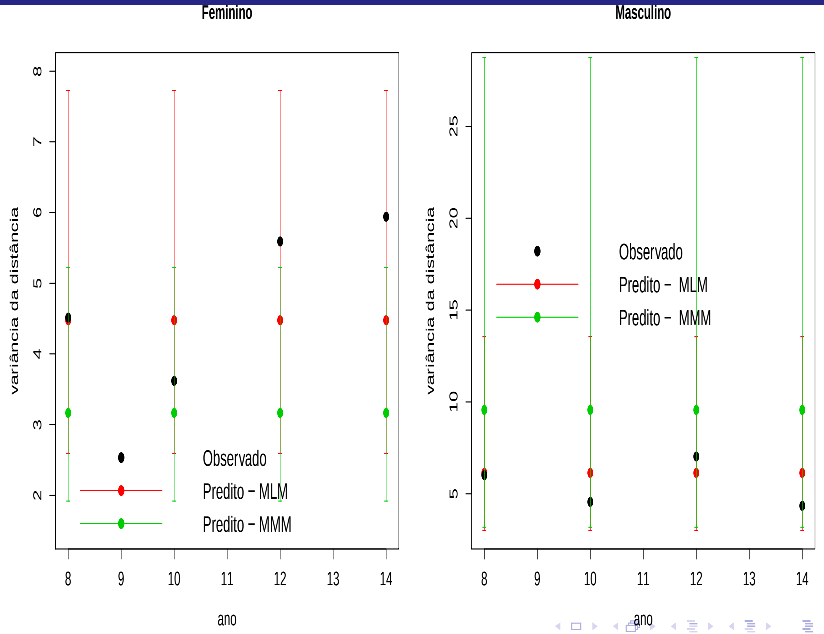
Parâmetro	Estimativa	IC(95%)
ρ	-0,33	[-0,33 ; .]

OBS: Lembre-se de que, neste caso $Cov(\boldsymbol{Y}_j) = \sigma^2(\boldsymbol{Z}_j\boldsymbol{D}\boldsymbol{Z}_j' + \boldsymbol{\Lambda}_j\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{\Lambda}_j)$

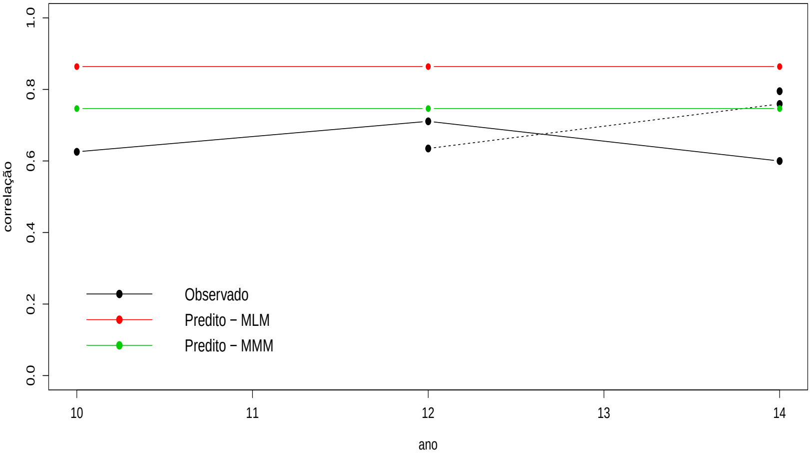
MMM

Parâmetro	Estimativa	IC(95%)
ρ	0,75	[0,58 ; 0,86]


Observado – F
Observado – M
Predito – F – MLM
Predito – M – MLM
Predito – F – MMM
Predito – M – MMM
distância média
20
22
24
26
28
8
9
10
11
12
13
14
ano

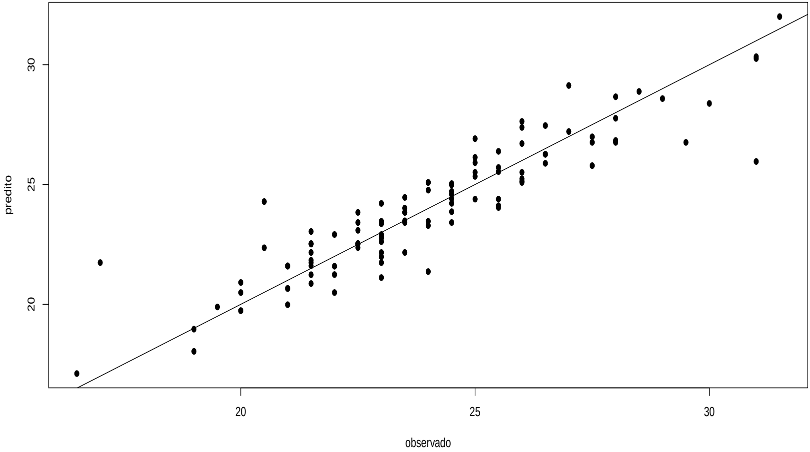


Feminino
Masculino
variância da distância
ano
8
9
10
11
12
13
14
2
3
4
5
6
7
8
5
10
15
20
25
Observado
Predito - MLM
Predito - MMM

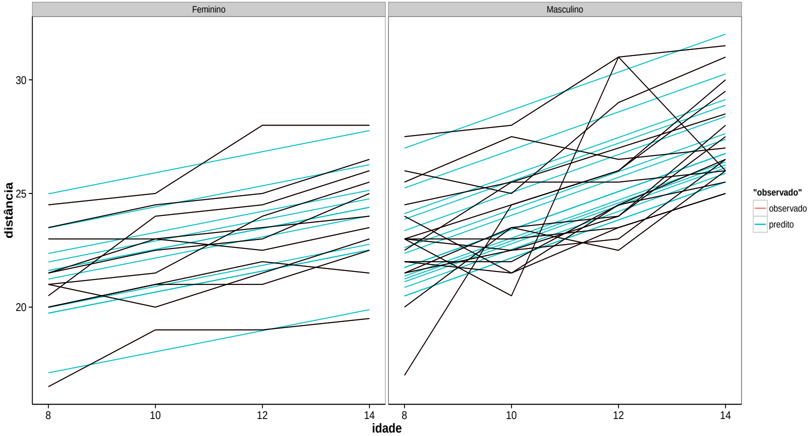


correlação
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
10
11
12
13
14
ano
Observado
Predito − MLM
Predito − MMM

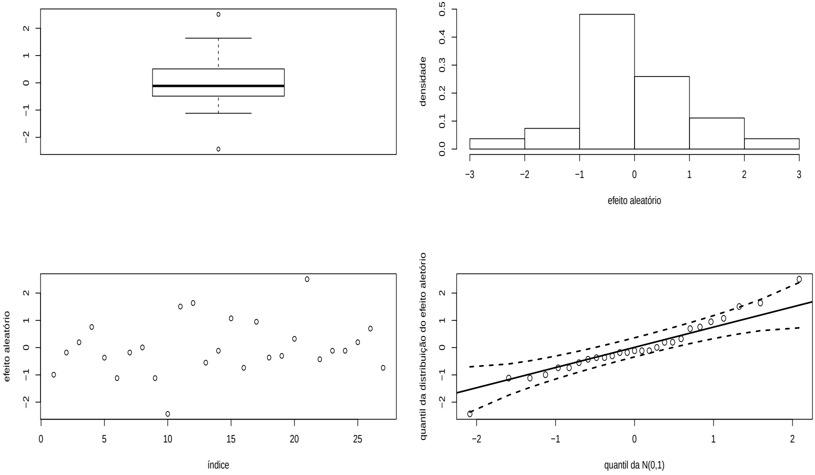
Valores individuais preditos: $\widehat{Yb}_j = \boldsymbol{X}_j\widehat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{Z}_j\widehat{\boldsymbol{b}}_j$



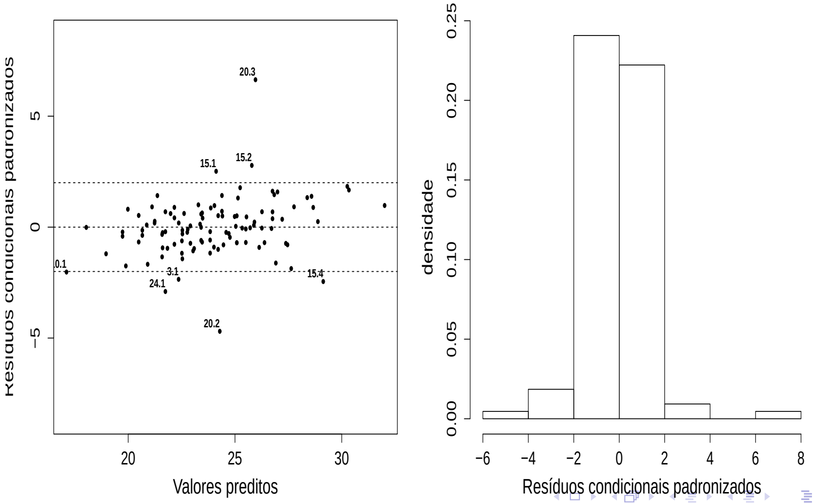
Perfis individuais preditos e observados



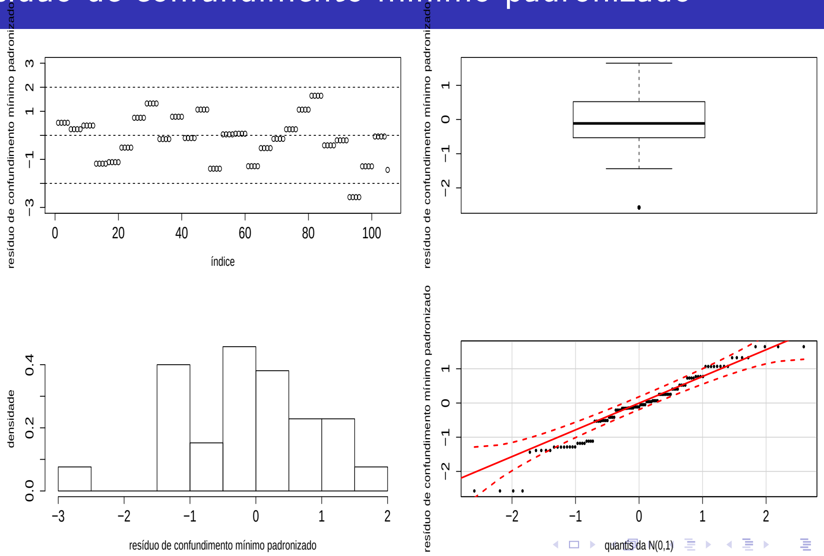
Efeitos aleatórios



Resíduo condicional padronizado



Resíduo de confundimento mínimo padronizado



Resíduo de confundimento mínimo padronizado