

Métodos de estimação (pontual): um pouco sobre teoria assintótica

Prof. Caio Azevedo

Introdução

- Seja $\hat{\theta}$ um estimador de $\tau(\theta)$, isto é, $\hat{\theta}_n = \tau(X_1, \dots, X_n)$ é função de n (tamanho da amostra). Assim, podemos definir uma sequência de estimadores $\{\hat{\theta}_n\}_{n \geq 1}$ (va's).
- Para n suficientemente grande, desejamos que $\hat{\theta}_n \approx \tau(\theta)$, em algum sentido probabilístico.
- Além disso, muitas vezes é útil estudar o comportamento da distribuição de $\hat{\theta}_n$, quando $n \rightarrow \infty$, para construir intervalos de confiança, testes de hipótese, determinar tamanho de amostras etc.

Consistência fraca

- Def (Consistência fraca): Seja $\hat{\theta}_n$ um estimador de $\tau(\theta)$. Dizemos que $\hat{\theta}_n$ é fracamente consistente se:

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \tau(\theta)$$

ou seja, $\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \tau(\theta)| > \epsilon) = 0$

- Exemplo: X_1, \dots, X_n uma aa de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, temos que \bar{X} e $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ são fracamente consistentes para μ e σ^2 , respectivamente. Com efeito, por Chebyshev, temos que:

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X} - \mu| > \epsilon) = 0$$

Consistência forte

- Def (Consistência forte): Dizemos que $\hat{\theta}_n$ converge fortemente para $\tau(\theta)$ se:

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} \tau(\theta),$$

ou seja, se

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_n = \tau(\theta)\right) = 1.$$

- No exemplo anterior, temos que

$$\bar{X} \xrightarrow{q.c.} \mu; S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \xrightarrow{q.c.} \sigma^2.$$

- Para $\bar{X} \xrightarrow{q.c.} \mu$, a prova é obtida através da lei Forte dos Grandes Números (LFGN) (exercício).

Consistência forte

- Para a variância, temos que:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2$$

- Além disso, tem-se que: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} \mu^2 + \sigma^2$ (LFGN) e $\bar{X}^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} \mu^2$ (LFGN, + $g(x) = x^2$ é uma função contínua).
- Portanto, (Teorema de Slutsky)

$$S^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.c.} \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

Consistência

- Seja $\hat{\theta}_n$ um estimador de $\tau(\theta)$. Dizemos que $\hat{\theta}_n$ é consistente em média quadrática, ou simplesmente consistente se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E} \mathcal{Q} \mathcal{M}(\hat{\theta}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}[(\hat{\theta}_n - \tau(\theta))^2] = 0$$

- Isso ocorre, se e somente se:

$$\mathcal{V}(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0; \mathcal{B}^2(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \rightarrow \mathcal{B}(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

- Notação: $\hat{\theta}_n \xrightarrow{m.q.} \tau(\theta)$.

Consistência

- Exercício: Seja $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} U[0, \theta]$. Prove que $Y_n = \max(\mathbf{X})$ é consistente.
- Obs: Pela desigualdade de Chebyshev, temos que

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{q.c.} \tau(\theta) \Rightarrow \hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \tau(\theta)$$

Teorema

- Seja X_1, \dots, X_n uma aa de $f_{\mathbf{X}}(\cdot, \theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}$ e $f_{\mathbf{X}}(\cdot; \theta)$ satisfazendo as CR. Então se $\hat{\theta}_n$ é o emv de θ , temos que $\hat{\theta}_n$ é consistente, e

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0, I_1(\theta)^{-1})$$

em que $I_1(\theta) = \mathcal{E} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_{\mathbf{X}}(X_1; \theta) \right\}$.

- Isto é equivalente a dizer que, para n suficientemente grande, $\hat{\theta}_n \approx N(\theta, I^{-1}(\theta))$, em que

$$I(\theta) = \mathcal{E} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}; \theta) \right\} = n \mathcal{E} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_{\mathbf{X}}(X_1; \theta) \right\} = n I_1(\theta)$$

Teorema

- Esboço da demonstração: assumir que $\hat{\theta}_n$ é consistente. O caminho é expandir $S(\theta) = \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta}$ em torno de $\hat{\theta}(\hat{\theta}_n)$.
- Dessa forma,

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = \underbrace{\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\hat{\theta}}}_{=0; \text{pela def. de emv}} + \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} (\theta - \hat{\theta}) + R(\theta, \hat{\theta}) \quad (1)$$

Teorema

■ Resultados:

1)

$$-\frac{1}{n} \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_X(X_i; \theta) \xrightarrow{P} I_1(\theta)$$

2)

$$\frac{1}{n} \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_X(X_i; \theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Teorema

- Pelo TCL, temos que

$$\sqrt{n} \frac{(\bar{Y} - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0, 1) \equiv \sqrt{n} \frac{(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_X(X_i; \theta) - 0)}{(I_1(\theta))^{1/2}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

3)

$$-\frac{1}{n} \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\hat{\theta}} \xrightarrow{P} I_1(\theta).$$

- Assim, de (1), vem que (assumindo $R(\theta, \hat{\theta}) \approx 0, n \rightarrow \infty$)

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \approx \frac{\frac{1}{n} \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta}}{-\frac{1}{n} \frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\hat{\theta}}} \xrightarrow{D} \frac{N(0, I_1(\theta))}{I_1(\theta)} \rightarrow N(0, I_1^{-1}(\theta))$$

Teorema

- Portanto, $\widehat{\theta}_n \approx N(\theta, nI_1^{-1}(\theta)) = N(\theta, I^{-1}(\theta))$, para n suficientemente grande.
- Pelo Método Delta (sendo T um estimador de $\tau(\theta)$), temos que:

$$\sqrt{n}(T - \tau(\theta)) \xrightarrow{D} N(0, [\tau'(\theta)]^2 I_1^{-1}(\theta))$$

- No caso multiparamétrico, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$, temos que

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} S(\theta_1) \\ S(\theta_2) \\ \vdots \\ S(\theta_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \end{bmatrix} \quad (\text{vetor escore})$$

Teorema

- e, a Matriz Hessiana / Informação de Fisher:

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1 \theta_p} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2 \theta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2 \theta_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_p \theta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_p \theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_p^2} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz Hessiana}$$

- Em que: $\mathbf{I}_O(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta})$ é a (matriz de) Informação de Fisher observada, enquanto que $\mathbf{I}_E(\boldsymbol{\theta}) \equiv \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathcal{E}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}))$ é (a matriz de) Informação de Fisher (esperada).
- Obs: Se X_1, \dots, X_n for uma aa de X , $X \sim f_X(\cdot; \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$, então $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = n\mathbf{I}_1(\boldsymbol{\theta})$, em que $\mathbf{I}_1(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{E}\left(-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'}\right)$.

Teorema

- Teorema: Seja X_1, \dots, X_n uma aa de $X \sim f_{\mathbf{X}}(\cdot; \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$, em que $f_{\mathbf{X}}(\cdot; \boldsymbol{\theta})$ satisfaz as condições de regularidade. Seja $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ o env de $\boldsymbol{\theta}$. Então, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ é consistente e:

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{D} N_k(\mathbf{0}, \mathbf{I}_1^{-1}(\boldsymbol{\theta}))$$

ou, de modo equivalente, $\hat{\boldsymbol{\theta}} \approx N_k(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}))$, para n suficientemente grande.

- Método delta (multiparamétrico): Seja $g : \mathcal{R}^k \rightarrow \mathcal{R}^r$, $g = (g_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, g_r(\boldsymbol{\theta}))'$, $r \leq k$, diferenciável e $g'_i(\boldsymbol{\theta}) \neq 0, \forall i$ e $\mathbf{T} = t(\mathbf{X})$ um estimador de $g(\boldsymbol{\theta})$. Então:

$$\sqrt{n}(\mathbf{T} - g(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{D} N_k(\mathbf{0}, \mathbf{G}\mathbf{I}_1^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{G}')$$

em que (próximo slide):

Teorema

- Em que

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_r(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_r(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_r(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \end{bmatrix}$$

- Exemplo: Seja X_1, \dots, X_n uma aa de $X \sim \text{gama}(r, \lambda)$. Temos que (veja também [aqui](#), págs. 43 a 45):

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\lambda^n (\Gamma(r))^n} e^{-n \frac{\bar{x}}{\lambda}} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} \mathbb{1}_{\mathcal{R}^n}(\mathbf{x})$$

Exemplo

- Assim:

$$S(r) = -n \ln(\lambda) - n \frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)} + \sum_{i=1}^n \ln x_i; S(\lambda) = -\frac{nr}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n x_i$$

- As derivadas segundas são dadas por

$$H(r, r) = -\frac{n}{\Gamma(r)^2} [\Gamma''(r)\Gamma(r) - (\Gamma'(r))^2] = -\Gamma^*(r)$$

$$H(\lambda, \lambda) = \frac{rn}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^3} \sum_{i=1}^n x_i; H(r, \lambda) = -\frac{n}{\lambda}$$

Exemplo

- Os elementos da informação de Fisher são dados por:

$$I(r, r) = \Gamma^*(r); I(\lambda, \lambda) = \frac{rn}{\lambda^2}; I(r, \lambda) = \frac{n}{\lambda}$$

- Portanto

$$I(\theta) = \begin{bmatrix} \Gamma^*(r) & \frac{n}{\lambda} \\ \frac{n}{\lambda} & \frac{nr}{\lambda^2} \end{bmatrix} \rightarrow I(\theta)^{-1} = \frac{\lambda^2}{n[r\Gamma(r) - n]} \begin{bmatrix} \frac{nr}{\lambda^2} & \frac{-n}{\lambda} \\ \frac{-n}{\lambda} & \Gamma^*(r) \end{bmatrix}$$

- Em particular, $\hat{r} \approx N\left(r, \frac{r}{r\Gamma^*(r) - n}\right)$ e $\hat{\lambda} = N\left(\lambda, \frac{\lambda^2 \Gamma^*(r)}{n[r\Gamma(r) - n]}\right)$, para n suficientemente grande.

Exercício

- Lista V, Exercício 7. Temos que:

$$\begin{aligned}f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta) &= \theta^n \prod_{i=1}^n (1 + x_i)^{-(1+\theta)} \mathbb{1}_{(\mathcal{R}^+)^n}(\mathbf{x}) \\ &= \exp \left\{ -(1 + \theta) \sum_{i=1}^n \ln(1 + x_i) + n \ln \theta \right\} \mathbb{1}_{(\mathcal{R}^+)^n}(\mathbf{x}) \\ &= \exp \{ c(\theta) t(\mathbf{x}) + d(\theta) \} h(\mathbf{x})\end{aligned}$$

em que

$$c(\theta) = -(1+\theta); t(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \ln(1+x_i); d(\theta) = n \ln \theta; h(\mathbf{x}) = \mathbb{1}_{(\mathcal{R}^+)^n}(\mathbf{x})$$

Exercício

- Por outro lado,

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta) = \exp \{ \eta t(\mathbf{x}) + d_0(\eta) \} h(\mathbf{x})$$

em que

$$\eta = -(1 + \theta) \rightarrow \theta = -(1 + \eta); d_0(\eta) = n \ln \{ -(1 + \eta) \}$$

$$\Lambda = \{ x \in (-\infty, -1) \}$$

- Como Λ contem algum segmento de reta e $X \in FE_1(\theta)$ então $t(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \ln(1 + X_i)$ é uma estatística suficiente, completa e minimal.
- Note, ainda, que:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta) = -n \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + x_i) - \frac{1}{\theta} \right\}$$

Exercício

- Como $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta)$ pertence à FE, se $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + x_i)$ for um env de $1/\theta$ então, pelo TCR, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + x_i)$ é o ENVUM de $1/\theta$.
- Com efeito, temos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t(\mathbf{X})) &= d'_0(\eta) = \frac{n}{1 + \eta} = -\frac{n}{\theta} \\ &\rightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{n}t(\mathbf{X})\right) = \frac{1}{\theta}\end{aligned}$$

em que $\frac{1}{n}t(\mathbf{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + X_i)$.

- Logo $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + X_i)$ é o ENVUM de $\frac{1}{\theta}$.

Exercício

- Note, também que:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(t(\mathbf{X})) &= -\frac{-\eta}{(1+\eta)^2} = \frac{n}{\theta^2} \\ \rightarrow \mathcal{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1+X_i)\right) &= \frac{1}{n\theta^2} \end{aligned}$$

- Por outro lado, temos que $LICR(\tau(\theta)) = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{I(\theta)}$. Além disso,

$$\tau'(\theta) = -\frac{1}{\theta^2}; H(\theta) = \frac{-n}{\theta^2}; I(\theta) = \mathcal{E}(-H(\theta)) = \frac{n}{\theta^2}$$

- Assim,

$$LICR(\tau(\theta)) = \frac{1}{n\theta^2} = \mathcal{V}\left(\frac{1}{n} t(\mathbf{X})\right)$$

Exemplo

- Seja X_1, \dots, X_n uma aa de X , $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$, $\theta_i > 0$, $i = 1, 2$, tal que:

$$\begin{aligned} f_X(x; \theta) &= \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \left\{ \exp \left\{ -\frac{x}{\theta_1} \right\} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x) + \exp \left\{ \frac{x}{\theta_2} \right\} \mathbb{1}_{[-\infty, 0)}(x) \right\} \\ &= \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \exp \left\{ -\frac{x}{\theta_1} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x) + \frac{x}{\theta_2} \mathbb{1}_{[-\infty, 0)}(x) \right\} \end{aligned}$$

Exemplo

- Assim

$$\begin{aligned}L(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{(\theta_1 + \theta_2)^n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta_1} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta_2} \mathbb{1}_{[-\infty,0)}(x)\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{\theta_1} s_1 - \frac{1}{\theta_2} s_2 - n \ln(\theta_1 + \theta_2)\right\} \\ &= \exp\{c_1(\boldsymbol{\theta})t_1(\mathbf{x}) + c_2(\boldsymbol{\theta})t_2(\mathbf{x}) + d(\boldsymbol{\theta})\}\end{aligned}\tag{2}$$

Exemplo

- em que $s_1 = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x_i)$, $s_2 = -\sum_{i=1}^n x_i \mathbb{1}_{[-\infty, 0)}(x_i)$,
 $c_i(\theta) = -\frac{1}{\theta_i}$ e $t_i(\mathbf{x}) = s_i$.
- Para a obtenção dos emv, note que:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} S_1(\boldsymbol{\theta}) \\ S_2(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}$$

Em que

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} l(\boldsymbol{\theta}) = \frac{s_1}{\theta_1^2} - \frac{n}{\theta_1 + \theta_2}; \quad \frac{\partial}{\partial \theta_2} l(\boldsymbol{\theta}) = \frac{s_2}{\theta_2^2} - \frac{n}{\theta_1 + \theta_2}$$

Exemplo

- Assim, temos que:

$$\begin{cases} \frac{s_1}{\tilde{\theta}_1^2} = \frac{n}{\theta_1 + \theta_2} \\ \frac{s_2}{\tilde{\theta}_2^2} = \frac{n}{\theta_1 + \theta_2} (*) \end{cases}$$

- De (*), temos que:

$$\frac{s_1}{\tilde{\theta}_1^2} = \frac{s_2}{\tilde{\theta}_2^2} \rightarrow \tilde{\theta}_2 = \tilde{\theta}_1 \frac{\sqrt{s_2}}{\sqrt{s_1}} \quad (3)$$

Exemplo

- De (3) em (*), temos que:

$$\begin{aligned}\frac{s_2}{\tilde{\theta}_1^2 \frac{s_2}{s_1}} &= \frac{n}{\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_1 \frac{\sqrt{s_2}}{\sqrt{s_1}}} \rightarrow \frac{s_1}{\tilde{\theta}_1^2} = \frac{n\sqrt{s_1}}{\tilde{\theta}_1(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})} \\ \rightarrow \tilde{\theta}_1 &= \frac{1}{n} \sqrt{s_1} (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})\end{aligned}\quad (4)$$

- Portanto, de (4) em (3), vem que $\tilde{\theta}^2 = \frac{1}{n} \sqrt{s_2} (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})$.

Exemplo

- Como $f_{\mathbf{X}}(\cdot; \theta) \in FE_2(\theta)$, então satisfaz as CR. Portanto:

$$\mathcal{E} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}; \theta) \right) = 0$$

- Assim

$$\mathcal{E} \left(\frac{S_1}{\theta_1^2} - \frac{n}{\theta_1 + \theta_2} \right) = 0 \rightarrow \frac{1}{n} \mathcal{E}(S_1) = \frac{\theta_1^2}{\theta_1 + \theta_2}$$

- Analogamente, $\frac{1}{n} \mathcal{E}(S_2) = \frac{\theta_2^2}{\theta_1 + \theta_2}$.

Exemplo

- Além disso, temos que:

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} l(\theta) = -\frac{2s_1}{\theta_1^3} + \frac{n}{(\theta_1 + \theta_2)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} l(\theta) = -\frac{2s_2}{\theta_2^3} + \frac{n}{(\theta_1 + \theta_2)^2}; \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} l(\theta) = \frac{n}{(\theta_1 + \theta_2)^2}$$

- Usando tais valores esperados, podemos provar que:

$$I(\theta_1, \theta_1) = n \frac{\theta_1 + 2\theta_2}{\theta_1(\theta_1 + \theta_2)^2}$$

$$I(\theta_2, \theta_2) = n \frac{\theta_2 + 2\theta_1}{\theta_2(\theta_1 + \theta_2)^2}; \quad I(\theta_1, \theta_2) = \frac{-n}{(\theta_1 + \theta_2)^2}$$

- Assim, temos que $\hat{\theta} - \theta \approx N_2(\mathbf{0}, I^{-1}(\theta))$

Referências

- From Finite Sample to Asymptotic Methods in Statistics ([link](#)).
- Asymptotic Theory of Statistics and Probability ([link](#)).
- Large Sample Techniques for Statistics ([link](#)).
- Elements of Large-Sample Theory ([link](#)).
- A Course in Mathematical Statistics and Large Sample Theory ([link](#)).