Métodos de estimação (pontual): um pouco sobre teoria assintótica

Prof. Caio Azevedo

Introdução

- Seja $\widehat{\theta}$ um estimador de $\tau(\theta)$, isto é, $\widehat{\theta}_n = \theta(X_1, ..., X_n)$ é função de n (tamanho da amostra). Assim, podemos definir uma sequência de estimadores $\left\{\widehat{\theta}_n\right\}_{n \geq 1}$ (va's).
- Para n suficientemente grande, desejamos que $\widehat{\theta}_n \approx \tau(\theta)$, em algum sentido probabilístico.
- Além disso, muitas vezes é útil estudar o comportamento da distribuição de $\widehat{\theta}_n$, quando $n \to \infty$, para construir intervalos de confiança, testes de hipótese, determinar tamanho de amostras etc.

Consistência fraca

- Def (Consistência fraca): Seja $\widehat{\theta}_n$ um estimador de $\tau(\theta)$. Dizemos que $\widehat{\theta}_n$ é fracamente consistente se:

$$\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \tau(\theta)$$

ou seja $\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\left(|\widehat{\theta}_n - \tau(\theta)| > \epsilon\right) = 0$

- Exemplo: $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, temos que $\overline{X}$ e $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ são fracamente consistentes para μ e σ^2, respectivamente.
- Por Chebyshev, temos que:

$$P\left(|\overline{X} - \mu| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \to \lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X} - \mu| > \epsilon\right) = 0$$

Consistência forte

- Def (Consistência forte): Dizemos que $\widehat{\theta}_n$ converge fortemente para $\tau(\theta)$ se:

$$\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} \tau(\theta),$$

ou seja, se

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \widehat{\theta}_n = \tau(\theta)\right) = 1.$$

- No exemplo anterior, temos que $\overline{X} \overset{q.c.}{\rightarrow} \mu$ e $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \overset{q.c.}{\rightarrow} \sigma^2$.
- Para $\overline{X} \overset{q.c.}{\rightarrow} \mu$, a prova é obtida através da lei Forte dos Grandes Números (LFGN) (exercício).

Consistência forte

- Para a variância, temos que:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2$$

- Além disso, tem-se que: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} \mu^2 + \sigma^2$ (LFGN) e $\overline{X}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} \mu^2$ (LFGN, + $g(x) = x^2$ é uma função contínua).
- Portanto, (Teorema de Slutsky)

$$S^2 \xrightarrow[n\to\infty]{q.c.} \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

Consistência

- Seja $\widehat{\theta}_n$ um estimador de $\tau(\theta)$. Dizemos que $\widehat{\theta}_n$ é consistente em média quadrática, ou simplesmente consistente se:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{EQM}(\widehat{\theta}_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}[(\widehat{\theta}_n - \tau(\theta))^2] = 0$$

- Isso ocorre, se e somente se:

$$\mathcal{V}(\widehat{\theta}_n) \overset{n\to\infty}{\to} 0; \mathcal{B}^2(\widehat{\theta}_n) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \to \mathcal{B}(\widehat{\theta}_n) \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

- Notação: $\widehat{\theta}_n \overset{m.q.}{\to} \tau(\theta)$.
- Exercício: Seja $X_1, ..., X_n \overset{iid}{\sim} U[0,\theta]$. Prove que $Y_n = \max(\boldsymbol{X})$ é consistente.
- Obs: Pela desigualdade de Chebyshev, temos que

$$\widehat{\theta}_n \overset{q.c.}{\to} \tau(\theta) \Rightarrow \widehat{\theta}_n \overset{P}{\to} \tau(\theta)$$

Teorema

- Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $f_{\boldsymbol{X}}(., \theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}$ e $f_{\boldsymbol{X}}(.; \theta)$ satisfazendo as CR. Então se $\widehat{\theta}_n$ é o emv de θ, temos que $\widehat{\theta}_n$ é consistente, e

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{D} N(0, I_1(\theta)^{-1})$$

  em que $I_1(\theta) = \mathcal{E}\left\{-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_X(X_1; \theta)\right\}$.

- Isto é equivalente a dizer que, para n suficientemente grande, $\widehat{\theta}_n \approx N(\theta, I^{-1}(\theta))$, em que

$$I(\theta) = \mathcal{E}\left\{-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}; \theta)\right\} = n\mathcal{E}\left\{-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_X(X_1; \theta)\right\} = nI_1(\theta)$$

Teorema

- Idéia a respeito da demonstração: assumir que $\widehat{\theta}_n$ é consistente. O caminho é expandir $S(\theta) = \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta}$ em torno de $\widehat{\theta}(\widehat{\theta}_n)$.
- Dessa forma,

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = \underbrace{\left.\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\widehat{\theta}}}_{=0;\text{pela def. de emv}} + \left.\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\widehat{\theta}} (\theta - \widehat{\theta}) + R(\theta, \widehat{\theta}) \quad (1)$$

- Resultados:

1)

$$-\frac{1}{n}\frac{\partial l^2(\theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\ln f_X(X_i;\theta) \xrightarrow{P} I_1(\theta)$$

.

2)

$$\frac{1}{n}\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \theta}\ln f_X(X_i;\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Teorema

- Pelo TCL, temos que

$$\sqrt{n}\frac{(\overline{Y}-\mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0,1) \equiv \sqrt{n}\frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f_X(X_i;\theta)-0\right)}{(I_1(\theta))^{1/2}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

3)

$$-\frac{1}{n}\frac{\partial l^2(\theta)}{\partial\theta^2}\bigg|_{\theta=\widehat{\theta}} \xrightarrow{P} I_1(\theta).$$

- Assim, de (1), vem que (assumindo $R(\theta,\widehat{\theta}) \approx 0, n\to\infty$)

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}-\theta) \approx \frac{\frac{1}{n}\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}}{-\frac{1}{n}\left.\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\widehat{\theta}}} \xrightarrow{D} \frac{N(0,I_1(\theta))}{I_1(\theta)} \to N(0,I_1^{-1}(\theta))$$

Teorema

- Portanto, $\widehat{\theta}_n \approx N(\theta, nI_1^{-1}(\theta)) = N(\theta, I^{-1}(\theta))$, para n suficientemente grande.
- Pelo Método Delta (sendo T um estimador de $\tau(\theta)$), temos que:

$$\sqrt{n}(T - \tau(\theta)) \xrightarrow{D} N(0, [\tau'(\theta)]^2 I_1^{-1}(\theta))$$

- No caso multiparamétrico, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$, temos que

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} S(\theta_1) \\ S(\theta_2) \\ \vdots \\ S(\theta_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \end{bmatrix} \text{(vetor escore)}$$

Teorema

- e, a Matriz Hessiana / Informação de Fisher:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1\theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1\theta_p} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_2\theta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_2\theta_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_p\theta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_p\theta_2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_p^2} \end{bmatrix} \text{ Matriz Hessiana}$$

- Em que: $\boldsymbol{I}_O(\boldsymbol{\theta}) = -\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta})$ é a (matriz de) Informação de Fisher observada, enquanto que $\boldsymbol{I}_E(\boldsymbol{\theta}) \equiv \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathcal{E}(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\theta}))$ é (a matriz de) Informação de Fisher (esperada).
- Obs: Se $X_1, .., X_n$ for uma aa de X, $X \sim f_{\boldsymbol{X}}(.;\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$, então $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}) = n\boldsymbol{I}_1(\boldsymbol{\theta})$, em que $I_1(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{E}\left(-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}'}\right)$.

Teorema

- Teorema: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim f_{\boldsymbol{X}}(.;\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$, em que $f_{\boldsymbol{X}}(.;\boldsymbol{\theta})$ satisfaz as condições de regularidade. Seja $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ o env de $\boldsymbol{\theta}$. Então, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ é consistente e:

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{D} N_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{I}_1^{-1}(\boldsymbol{\theta}))$$

ou, de modo equivalente, $\widehat{\boldsymbol{\theta}} \approx N_k(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}))$, para n suficientemente grande.

- Método delta (multiparamétrico): Seja $g : \mathcal{R}^k \rightarrow \mathcal{R}^r$, $g = (g_1(\boldsymbol{\theta}), ..., g_r(\boldsymbol{\theta}))'$, $r \leq k$, diferenciável e $g_i'(\boldsymbol{\theta}) \neq 0, \forall i$ e $\boldsymbol{T} = t(\boldsymbol{X})$ um estimador de $g(\boldsymbol{\theta})$. Então:

$$\sqrt{n}(\boldsymbol{T} - g(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{D} N_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{G}\boldsymbol{I}_1^{-1}(\theta)\boldsymbol{G}')$$

em que (próximo slide):

Teorema

- Em que

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_r(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_r(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_r(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} \end{bmatrix}$$

- Exemplo: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim \text{gama}(r, \lambda)$. Temos que (veja também, pág.43 a 45, `http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/aula_Met_Estim_Mest_2S_2019.pdf`):

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\lambda^n (\Gamma(r))^n} e^{-n\frac{\overline{x}}{\lambda}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{r-1} \mathbb{1}_{\mathcal{R}^n}(\boldsymbol{x})$$

Exemplo

- Assim:

$$S(r) = -n\ln(\lambda) - n\frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i; \, S(\lambda) = -\frac{nr}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

- As derivadas segundas são dadas por

$$H(r,r) = -\frac{n}{\Gamma(r)^2}\left[\Gamma''(r)\Gamma(r) - (\Gamma'(r))^2\right] = -\Gamma^*(r)$$

$$H(\lambda,\lambda) = \frac{rn}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^3}\sum_{i=1}^{n}x_i; \, H(r,\lambda) = -\frac{n}{\lambda}$$

Exemplo

- Os elementos da informação de Fisher são dados por:

$$I(r,r) = \Gamma^*(r); I(\lambda,\lambda) = \frac{rn}{\lambda^2}; I(r,\lambda) = \frac{n}{\lambda}$$

- Portanto

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \Gamma^*(r) & \frac{n}{\lambda} \\ \frac{n}{\lambda} & \frac{nr}{\lambda^2} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta})^{-1} = \frac{\lambda^2}{n[r\Gamma(r) - n]} \begin{bmatrix} \frac{nr}{\lambda^2} & \frac{-n}{\lambda} \\ \frac{-n}{\lambda} & \Gamma^*(r) \end{bmatrix}$$

- Em particular, $\widehat{r} \approx N\left(r, \frac{r}{r\Gamma^*(r)-n}\right)$ e $\widehat{\lambda} = N\left(\lambda, \frac{\lambda^2\Gamma^*(r)}{n[r\Gamma(r)-n]}\right)$, pora n suficientemente grande.

Exercício

- Lista V, Exercício 7. Temos que:

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) &= \theta^n \prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-(1+\theta)} \mathbb{1}_{(\mathcal{R}^+)^n}(\boldsymbol{x}) \\
&= \exp\left\{-(1+\theta)\sum_{i=1}^{n}\ln(1+x_i) + n\ln\theta\right\} \mathbb{1}_{(\mathcal{R}^+)^n}(\boldsymbol{x}) \\
&= \exp\left\{c(\theta)t(\boldsymbol{x}) + d(\theta)\right\} h(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

em que

$$
c(\theta) = -(1+\theta);\ t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}\ln(1+x_i);\ d(\theta) = n\ln\theta;\ h(\boldsymbol{x}) = \mathbb{1}_{(\mathcal{R}^+)^n}(\boldsymbol{x})
$$

Exercício

- Por outro lado,

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) = \exp\left\{\eta t(\boldsymbol{x}) + d_0(\eta)\right\} h(\boldsymbol{x})$$

em que

$$\eta = -(1+\theta) \to \theta = -(1+\eta); d_0(\eta) = n \ln\left\{-(1+\eta)\right\}$$
$$\Lambda = \{x \in (-\infty, -1)\}$$

- Como Λ contem algum segmento de reta e $X \in FE_1(\theta)$ então $t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1+X_i)$ é uma estatística suficiente, completa e minimal.
- Note, ainda, que:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) = -n\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1+x_i) - \frac{1}{\theta}\right\}$$

Exercício

- Como $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta)$ pertence à FE, se $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+x_i)$ for um env de $1/\theta$ então, pelo TCR, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+x_i)$ é o ENVUM de $1/\theta$.
- Com efeito, temos que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(t(\boldsymbol{X})) &= d_0'(\eta) = \frac{n}{1+\eta} = -\frac{n}{\theta} \\
&\rightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{n}t(\boldsymbol{X})\right) = \frac{1}{\theta}
\end{aligned}
$$

  em que $\frac{1}{n}t(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i)$.
- Logo $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i)$ é o ENVUM de $\frac{1}{\theta}$.

Exercício

- Note, também que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}(t(\boldsymbol{X})) &= -\frac{-\eta}{(1+\eta)^2} = \frac{n}{\theta^2} \\
&\to \mathcal{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i)\right) = \frac{1}{n\theta^2}
\end{aligned}
$$

- Por outro lado, temos que $LICR(\tau(\theta)) = \frac{[\tau'(\theta)]^2}{I(\theta)}$. Além disso,

$$\tau'(\theta) = -\frac{1}{\theta^2}; H(\theta) = \frac{-n}{\theta^2}; I(\theta) = \mathcal{E}(-H(\theta)) = \frac{n}{\theta^2}$$

- Assim,

$$LICR(\tau(\theta)) = \frac{1}{n\theta^2} = \mathcal{V}\left(\frac{1}{n}t(\boldsymbol{X})\right)$$

Exemplo

- Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de X, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)', \theta_i > 0, i = 1, 2,$ tal que:

$$
\begin{aligned}
f_X(x; \boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \left\{ \exp\left\{ -\frac{x}{\theta_1} \right\} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) + \exp\left\{ \frac{x}{\theta_2} \right\} \mathbb{1}_{[-\infty,0)}(x) \right\} \\
&= \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \exp\left\{ -\frac{x}{\theta_1} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) + \frac{x}{\theta_2} \mathbb{1}_{[-\infty,0)}(x) \right\}
\end{aligned}
$$

- Assim

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{(\theta_1 + \theta_2)^n} \exp\Bigg\{ -\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta_1} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta_2} \mathbb{1}_{[-\infty,0)}(x) \Bigg\} \qquad (2) \\
&= \exp\left\{ -\frac{1}{\theta_1} s_1 - \frac{1}{\theta_2} s_2 - n \ln(\theta_1 + \theta_2) \right\} \\
&= \exp\left\{ c_1(\boldsymbol{\theta}) t_1(\boldsymbol{x}) + c_2(\boldsymbol{\theta}) t_2(\boldsymbol{x}) + d(\boldsymbol{\theta}) \right\}
\end{aligned}
$$

Exemplo

- em que $s_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x_i)$, $s_2 = -\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{[-\infty,0)}(x_i)$, $c_i(\theta) = -\frac{1}{\theta_i}$ e $t_i(\boldsymbol{x}) = s_i$.
- Para a obtenção dos emv, note que:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} S_1(\boldsymbol{\theta}) \\ S_2(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}$$

Em que

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1} l(\boldsymbol{\theta}) = \frac{s_1}{\theta_1^2} - \frac{n}{\theta_1 + \theta_2}; \frac{\partial}{\partial\theta_2} l(\boldsymbol{\theta}) = \frac{s_2}{\theta_2^2} - \frac{n}{\theta_1 + \theta_2}$$

- Assim, temos que:

$$\begin{cases} \frac{s_1}{\widetilde{\theta}_1^2} = \frac{n}{\widetilde{\theta}_1 + \widetilde{\theta}_2} \\ \frac{s_2}{\widetilde{\theta}_2^2} = \frac{n}{\widetilde{\theta}_1 + \widetilde{\theta}_2} (*) \end{cases}$$

Exemplo

- De (*), temos que:

$$\frac{s_1}{\widetilde{\theta}_1^2} = \frac{s_2}{\widetilde{\theta}_2^2} \rightarrow \widetilde{\theta}_2 = \widetilde{\theta}_1 \frac{\sqrt{s_2}}{\sqrt{s_1}} \qquad (3)$$

De (3) em (*), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{s_2}{\widetilde{\theta}_1^2 \frac{s_2}{s_1}} &= \frac{n}{\widetilde{\theta}_1 + \widetilde{\theta}_1 \frac{\sqrt{s_2}}{\sqrt{s_1}}} \rightarrow \frac{s_1}{\widetilde{\theta}_1^2} = \frac{n\sqrt{s_1}}{\widetilde{\theta}_1(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})} \\ &\rightarrow \quad \widetilde{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sqrt{s_1}\left(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2}\right) \qquad (4) \end{aligned}$$

- Portanto, de (4) em (3), vem que $\widetilde{\theta}^2 = \frac{1}{n}\sqrt{s_2}\left(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2}\right)$.

Exemplo

- Como $f_{\boldsymbol{X}}(;\boldsymbol{\theta}) \in FE_2(\boldsymbol{\theta})$, então satisfaz as CR. Portanto:

$$\mathcal{E}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_j}\ln f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X};\theta)\right) = 0$$

- Assim

$$\mathcal{E}\left(\frac{s_1}{\theta_1^2} - \frac{n}{\theta_1+\theta_2}\right) = 0 \rightarrow \frac{1}{n}\mathcal{E}(S_1) = \frac{\theta_1^2}{\theta_1+\theta_2}$$

- Analogamente, $\frac{1}{n}\mathcal{E}(S_2) = \frac{\theta_2^2}{\theta_1+\theta_2}$.

Exemplo

- Além disso, temos que:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} l(\theta) = -\frac{2s_1}{\theta_1^3} + \frac{n}{(\theta_1+\theta_2)^2}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2} l(\theta) = -\frac{2s_2}{\theta_2^3} + \frac{n}{(\theta_1+\theta_2)^2}; \frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2} l(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n}{(\theta_1+\theta_2)^2}$$

- Usando tais valores esperados, podemos provar que:

$$I(\theta_1,\theta_1) = n\frac{\theta_1+2\theta_2}{\theta_1(\theta_1+\theta_2)^2}$$
$$I(\theta_2,\theta_2) = n\frac{\theta_2+2\theta_1}{\theta_2(\theta_1+\theta_2)^2}; I(\theta_1,\theta_2) = \frac{-n}{(\theta_1+\theta_2)^2}$$

- Assim, temos que $\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \approx N_2\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right)$