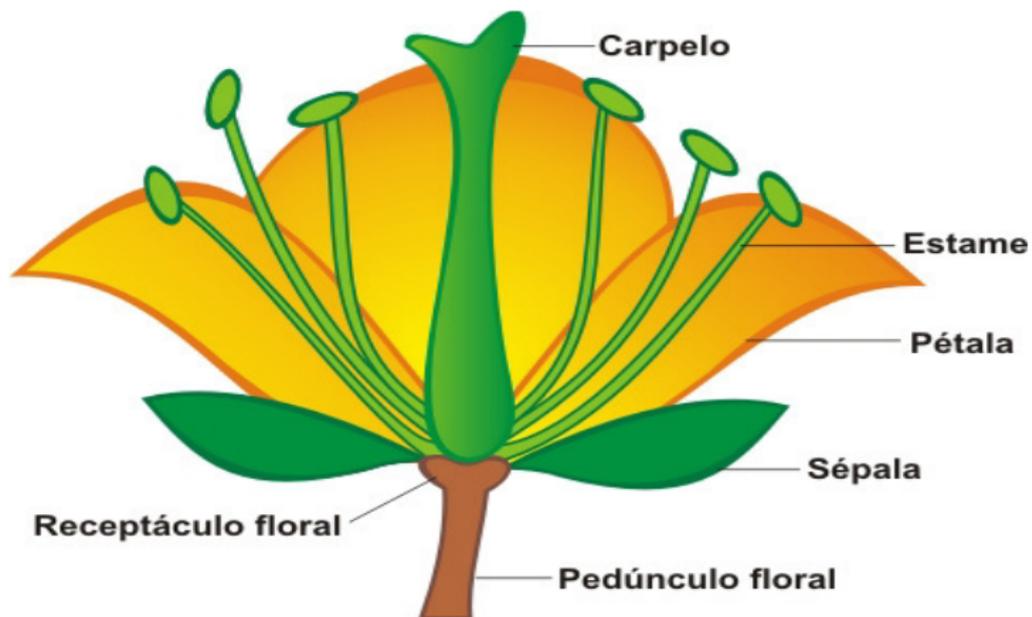


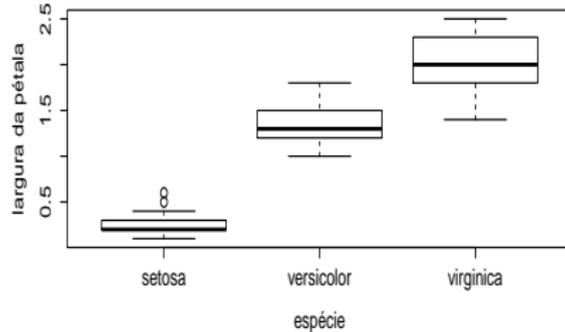
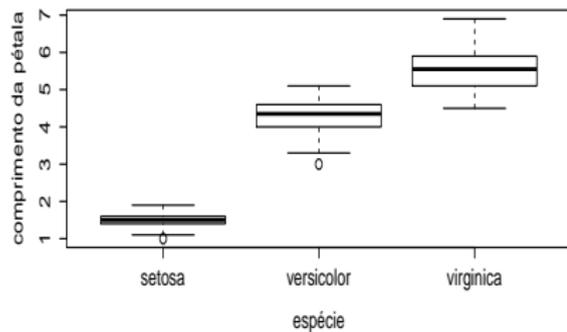
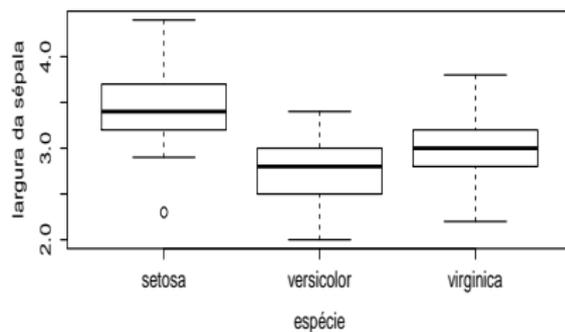
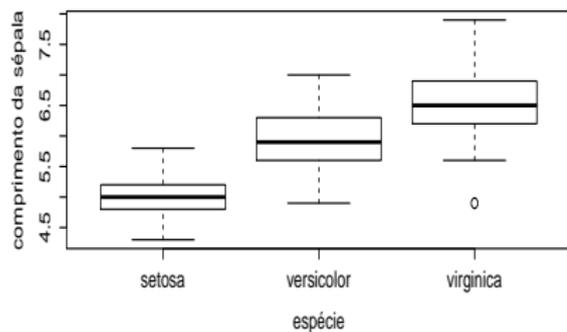
Modelo normal linear multivariado

Prof. Caio Azevedo

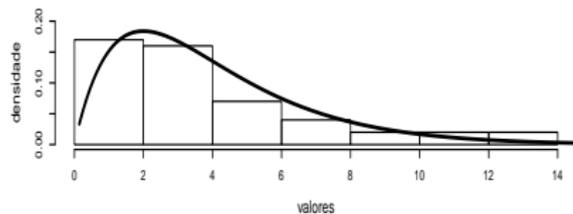
- Os dados consistem de 50 unidades amostrais de três espécies (setosa, virginica, versicolor) de íris (uma espécie de planta), ou seja, temos um total de 150 unidades amostrais.
- De cada uma delas mediu-se quatro variáveis: comprimento e largura da sépala (CS, LS) e comprimento e largura da pétala (CP,LP).
- Objetivo original: quantificar a variação morfológica em relação à essas espécies com bases nas quatro variáveis de interesse.



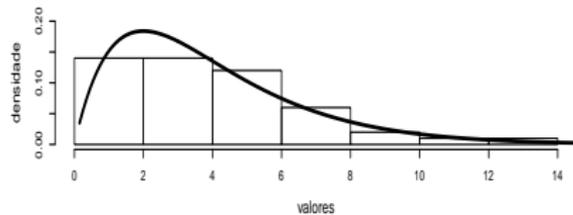
- Seja Y_{ijk} : o valor da k -ésima variável ($k=1,2,3,4$), para o j -ésimo indivíduo ($j=1,\dots,50$) do i -ésimo grupo ($i = 1, 2, 3$).
- Suposição $\mathbf{Y}_{ij} = (Y_{ij1}, Y_{ij2}, Y_{ij3}, Y_{ij4}) \stackrel{ind.}{\sim} N_4(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma})$.
- Tem-se, portanto, dados balanceados.



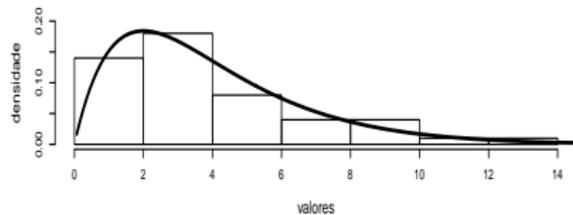
Distância de Mah. (íris setosa)



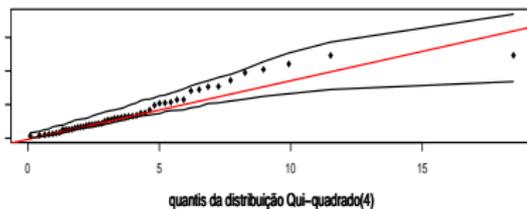
Distância de Mah. (íris versicolor)



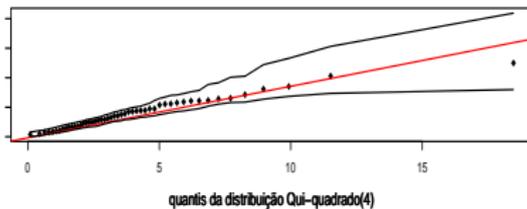
Distância de Mah. (íris virginica)



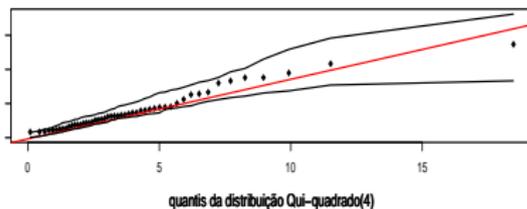
quantis da dis. de Mah. (setosa)



quantis da dis. de Mah. (versicolor)



quantis da dis. de Mah. (setosa)



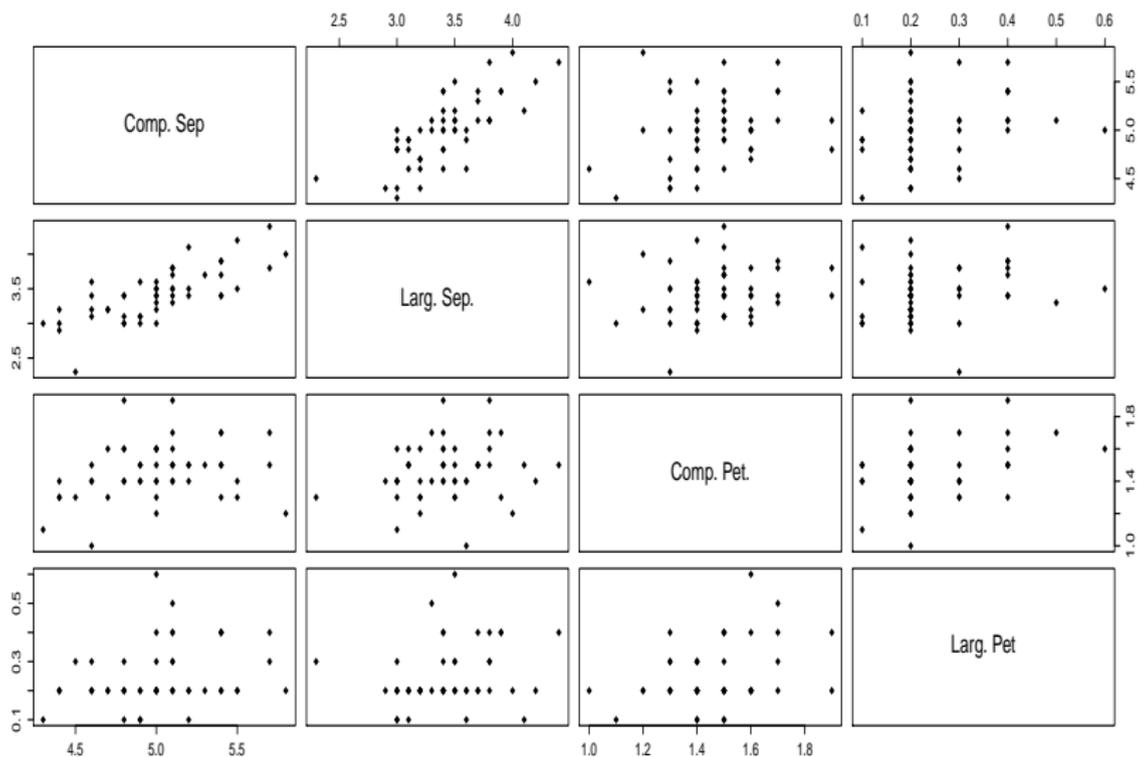
- Variâncias na diagonal principal, covariâncias acima e correlações abaixo (da diagonal principal).

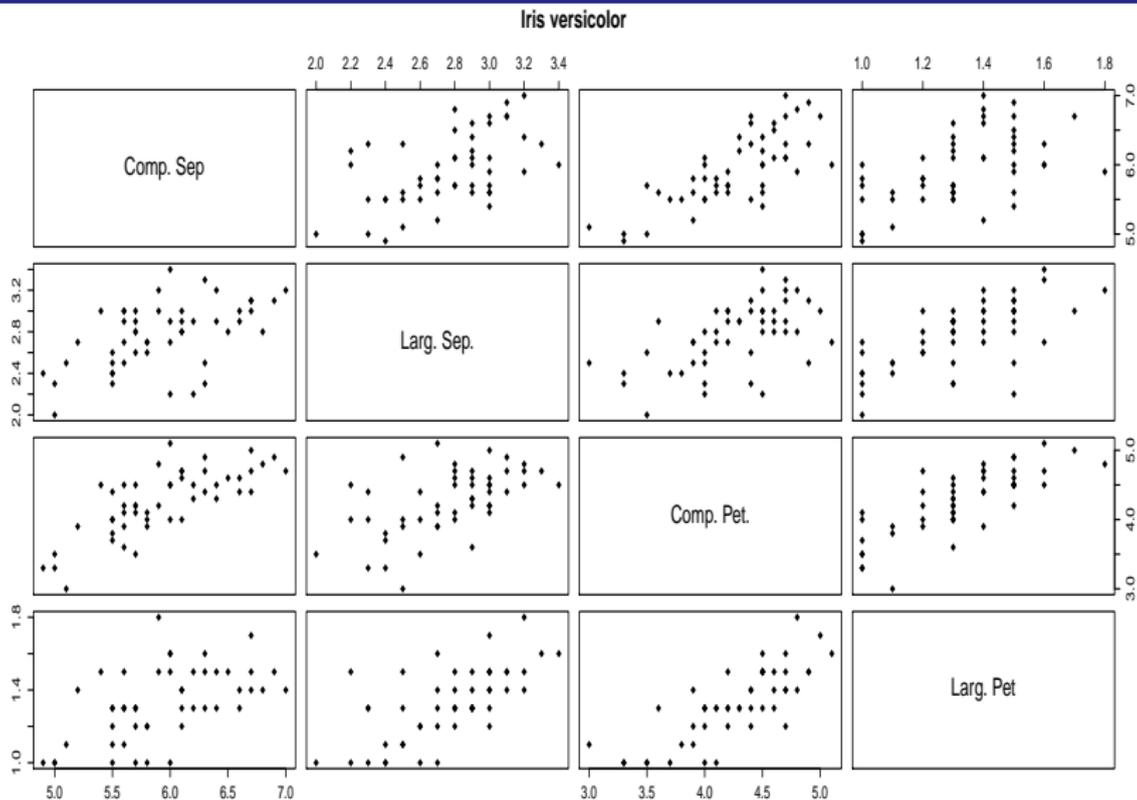
$$\tilde{\Psi}_{setosa} = \begin{bmatrix} 0,12 & 0,10 & 0,02 & 0,01 \\ 0,74 & 0,14 & 0,01 & 0,01 \\ 0,27 & 0,18 & 0,03 & 0,01 \\ 0,28 & 0,23 & 0,33 & 0,01 \end{bmatrix}$$

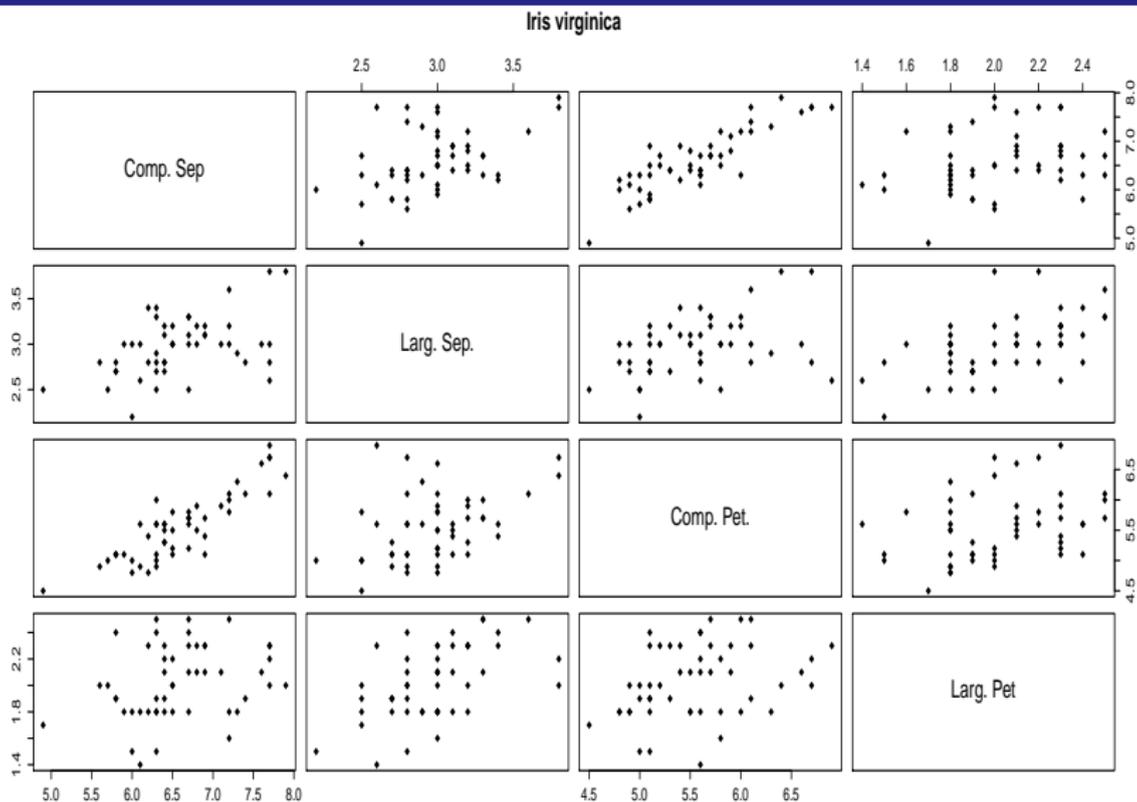
$$\tilde{\Psi}_{versicolor} = \begin{bmatrix} 0,27 & 0,08 & 0,18 & 0,06 \\ 0,53 & 0,10 & 0,08 & 0,04 \\ 0,75 & 0,56 & 0,22 & 0,07 \\ 0,55 & 0,66 & 0,79 & 0,04 \end{bmatrix}$$

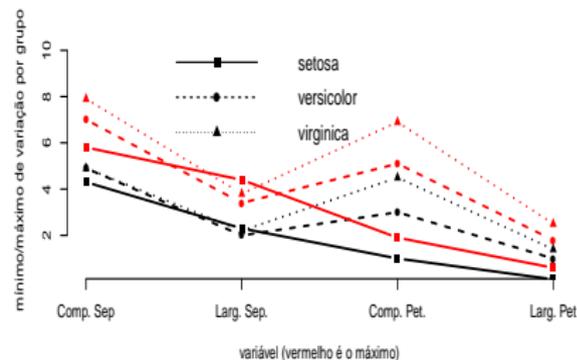
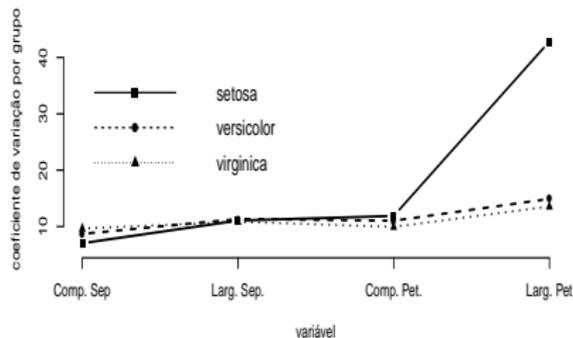
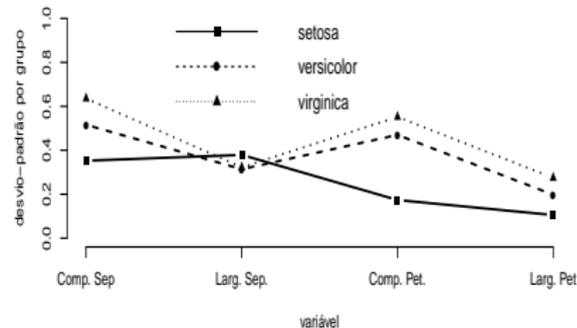
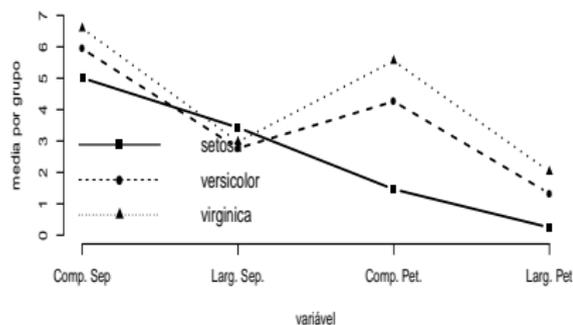
$$\tilde{\Psi}_{virginica} = \begin{bmatrix} 0,40 & 0,09 & 0,30 & 0,05 \\ 0,46 & 0,10 & 0,07 & 0,05 \\ 0,86 & 0,40 & 0,30 & 0,05 \\ 0,28 & 0,54 & 0,32 & 0,07 \end{bmatrix}$$

Íris setosa









$$\mathbf{Y}_{(n \times p)} = \begin{bmatrix}
 Y_{111} & Y_{112} & Y_{113} & Y_{114} \\
 Y_{121} & Y_{122} & Y_{123} & Y_{124} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 Y_{1(50)1} & Y_{1(50)2} & Y_{1(50)3} & Y_{1(50)4} \\
 \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\
 Y_{211} & Y_{212} & Y_{213} & Y_{214} \\
 Y_{221} & Y_{222} & Y_{223} & Y_{224} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 Y_{2(50)1} & Y_{2(50)2} & Y_{2(50)3} & Y_{2(50)4} \\
 \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\
 Y_{311} & Y_{312} & Y_{313} & Y_{314} \\
 Y_{321} & Y_{322} & Y_{323} & Y_{324} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 Y_{3(50)1} & Y_{3(50)2} & Y_{3(50)3} & Y_{3(50)4}
 \end{bmatrix}$$

Suposições

- Suponha um conjunto de G populações independentes da qual retiramos G amostras de tamanho n_i , $i = 1, \dots, G$,
- Por suposição, temos que $\mathbf{Y}_{ij} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma})$, em que $i = 1, 2, \dots, G$ (grupo) e $j = 1, 2, \dots, n_i$ (indivíduo). Notação: Y_{ijk} observação referente à variável k do indivíduo j do grupo i .
- Homocedasticidades: $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \dots = \boldsymbol{\Sigma}_G = \boldsymbol{\Sigma}$.
- Assim, temos a seguinte matriz de dados ($n = \sum_{i=1}^G n_i$):

$$\mathbf{Y}_{(n \times p)} = \begin{bmatrix}
 Y_{111} & Y_{112} & \dots & Y_{11p} \\
 Y_{121} & Y_{122} & \dots & Y_{12p} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 Y_{1n_11} & Y_{1n_12} & \dots & Y_{1n_1p} \\
 \hline
 Y_{211} & Y_{212} & \dots & Y_{21p} \\
 Y_{221} & Y_{222} & \dots & Y_{22p} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 Y_{2n_21} & Y_{2n_22} & \dots & Y_{2n_2p} \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \hline
 Y_{G11} & Y_{G12} & \dots & Y_{G1p} \\
 Y_{G21} & Y_{G22} & \dots & Y_{G2p} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 Y_{Gn_G1} & Y_{Gn_G2} & \dots & Y_{Gn_Gp}
 \end{bmatrix}$$

- Queremos testar
 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_G$ vs H_1 : pelo menos uma diferença.
- Uma abordagem: análise de variância multivariada (MANOVA).
- Comparar médias através do estudo da decomposição da matriz de variâncias-covariâncias total.
- Como resumir a informação das matrizes de covariâncias de interesse? Variâncias generalizadas.

Modelo linear normal multivariado

$$\mathbf{Y}_{(n \times p)} = \mathbf{X}_{(n \times q)} \mathbf{B}_{(q \times p)} + \boldsymbol{\xi}_{(n \times p)}$$

- $\mathbf{Y}_{(n \times p)}$: matriz de dados
- $\mathbf{X}_{(n \times q)}$: matriz de planejamento, conhecida e não-aleatória.
- $\mathbf{B}_{(q \times p)}$: parâmetros de interesse, desconhecido e não aleatório.
- $\boldsymbol{\xi}_{(n \times p)}$: matriz de resíduos, $\xi_{ij} \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

$$\mathbf{X}_{(n \times q)} = \begin{bmatrix}
 X_{111} & X_{112} & \dots & X_{11q} \\
 X_{121} & X_{122} & \dots & X_{12q} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 X_{1n_1 1} & X_{1n_1 2} & \dots & X_{1n_1 q} \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \hline
 X_{G11} & X_{G12} & \dots & X_{G1q} \\
 X_{G21} & X_{G22} & \dots & X_{G2q} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 X_{Gn_G 1} & X_{Gn_G 2} & \dots & X_{Gn_G q}
 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{(q \times p)} = \begin{bmatrix}
 \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1p} \\
 \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2p} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \mu_{G1} & \mu_{G2} & \dots & \mu_{Gp}
 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\xi}_{(n \times p)} = \begin{bmatrix} \xi_{111} & \xi_{112} & \cdots & \xi_{11p} \\ \xi_{121} & \xi_{122} & \cdots & \xi_{12p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{1n_11} & \xi_{1n_12} & \cdots & \xi_{1n_1p} \\ \hline \xi_{211} & \xi_{212} & \cdots & \xi_{21p} \\ \xi_{221} & \xi_{222} & \cdots & \xi_{22p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{2n_21} & \xi_{2n_22} & \cdots & \xi_{2n_2p} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \xi_{G11} & \xi_{G12} & \cdots & \xi_{G1p} \\ \xi_{G21} & \xi_{G22} & \cdots & \xi_{G2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{Gn_G1} & \xi_{Gn_G2} & \cdots & \xi_{Gn_Gp} \end{bmatrix}$$

Exemplo:

- Suponha $G = 3$, $p = 2$ e $n_i = 50$, $i = 1, 2, 3$ (3 grupos, duas variáveis e 50 indivíduos por grupo).
- Modelar as médias.
- $\mathbf{Y}_{(150 \times 2)}$.

Exemplo:

- $\mathbf{X} = \mathbf{I}_{(3 \times 3)} \otimes \mathbf{1}_{(50 \times 1)}$ (\otimes denota o produto de Kronecker à esquerda).

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{(50 \times 1)} & \mathbf{0}_{(50 \times 1)} & \mathbf{0}_{(50 \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(50 \times 1)} & \mathbf{1}_{(50 \times 1)} & \mathbf{0}_{(50 \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(50 \times 1)} & \mathbf{0}_{(50 \times 1)} & \mathbf{1}_{(50 \times 1)} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \\ \mu_{31} & \mu_{32} \end{bmatrix}$

- μ_{ik} : média da variável k do grupo i .

Decomposição da matriz de covariâncias total

- Pode-se demonstrar que:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^G \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{Y}_{ij} - \bar{\mathbf{Y}}) (\mathbf{Y}_{ij} - \bar{\mathbf{Y}})'}_{\text{Matriz de SQ Total}} = \underbrace{\sum_{i=1}^G n_i (\bar{\mathbf{Y}}_i - \bar{\mathbf{Y}}) (\bar{\mathbf{Y}}_i - \bar{\mathbf{Y}})'}_{\text{Matriz de SQ do Modelo}} + \underbrace{\sum_{i=1}^G \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{Y}_{ij} - \bar{\mathbf{Y}}_i) (\mathbf{Y}_{ij} - \bar{\mathbf{Y}}_i)'}_{\text{Matriz de SQ do Resíduo}}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{M} + \mathbf{E}$$

Variância generalizada

- Seja $\Sigma_{(p \times p)}$ uma matriz de covariâncias.
- Variância generalizada $|\Sigma|$ (resume a informação contida em Σ).
- Suponha $p = 2$.
- Assim $|\Sigma| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{11}^2$.
- Estamos supondo que $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_G = \Sigma$ (teste de Box para igualdade de matrizes de covariâncias).

As quatro estatísticas “tradicionais”

- Sejam $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$ os autovalores diferentes de zero da matriz $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{M}$, em que $s = \min(p, G - 1)$.
- Lambda de Wilkis:
$$\prod_{i=1}^s \frac{1}{1 + \lambda_i} = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E} + \mathbf{M}|}.$$
- Traço de Pillai:
$$\sum_{i=1}^s \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} = \text{tr}[\mathbf{M}(\mathbf{M} + \mathbf{E})^{-1}].$$
- Traço de Lawley-Hotteling:
$$\sum_{i=1}^s \lambda_i^{-1} = \text{tr}[\mathbf{M}\mathbf{E}^{-1}]$$
- Máxima raiz de Roy:
$$\frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}$$

Cont.

- Quanto menor o valor das estatística de Wilks e maior os valores das estatísticas de Pillai, Lawley-Hotelinf e de Roy, mais evidências tem-se contra H_0 .
- Existem aproximações pela distribuição F, para cada uma destas estatísticas.

Aplicação

- Dados da íris: as quatro variáveis apresentadas e os três grupos.
- O teste de Box rejeita a igualdade das matrizes de covariâncias (estatística = 140,94 ; pvalor < 0,0001).
- Utilização do pacote *manova* implementado na linguagem R.

Estatísticas

Estatística	Valor	Aproxim. pela dist. F.	p-valor
Wilks	0,02	119,15	$< 0,0001$
Pillai	1,19	53,46	$< 0,0001$
Hotelling-Lawley	32,47	580,53	$< 0,0001$
Roy	32,19	1167,00	$< 0,0001$

A igualdade simultânea dos vetores de médias é rejeitada, para cada uma das estatísticas. Como realizar outras comparações de interesse?

Forma vetorial

- Considere o modelo: $\mathbf{Y}_{(n \times p)} = \mathbf{X}_{(n \times q)}\mathbf{B}_{(q \times p)} + \boldsymbol{\xi}_{(n \times p)}$ Note que:

$$\mathbf{Y}'_{(p \times n)} = \mathbf{B}'_{(p \times q)}\mathbf{X}'_{(q \times n)} + \boldsymbol{\xi}'_{(p \times n)}$$

$$\text{vec}(\mathbf{Y}) = (\mathbf{X}_{(n \times p)} \otimes \mathbf{I}_q) \text{vec}(\mathbf{B}) + \text{vec}(\boldsymbol{\xi}')$$

$$\mathbf{Y}^*_{(np \times 1)} = \mathbf{X}^*_{(np \times pq)}\boldsymbol{\beta}_{(pq \times 1)} + \boldsymbol{\xi}^*_{(np \times 1)}$$

- Note, assim, que as observações dos indivíduos foram concatenadas (uma abaixo da outra), nos vetores \mathbf{Y}^* e $\boldsymbol{\xi}^*$.

Cont.

- Portanto, temos que $\mathbf{Y}^* \sim N_{pn}(\mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}^*)$, em que $\boldsymbol{\Sigma}^* = \mathbf{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{(p \times p)}$
- O estimador de mínimos quadrados generalizados de $\boldsymbol{\beta}$ é obtido minimizando-se

$$(\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta})' \boldsymbol{\Sigma}^{*-1} (\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^* \boldsymbol{\beta}).$$

- O que implica que $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}^{*'} \boldsymbol{\Sigma}^{*-1} \mathbf{X}^* \right)^{-1} \mathbf{X}^{*'} \boldsymbol{\Sigma}^{*-1} \mathbf{Y}^*$

Cont.

- Note que

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta} &= \left[(\mathbf{X} \otimes \mathbf{I})' (\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma})^{-1} (\mathbf{X} \otimes \mathbf{I}) \right]^{-1} (\mathbf{X} \otimes \mathbf{I})' (\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \mathbf{Y}^* \\
 &= \left[(\mathbf{X}'\mathbf{X} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \right]^{-1} [\mathbf{X}' \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}] \mathbf{Y}^* \\
 &= \left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \otimes \mathbf{I} \right] \mathbf{Y}^* \\
 &= \mathbf{A} \mathbf{Y}^* \tag{1}
 \end{aligned}$$

- Por outro lado, temos que $\mathcal{E}(\hat{\beta}) = \left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \otimes \mathbf{I} \right] [\mathbf{X} \otimes \mathbf{I}] \beta = \beta$.
- Além disso,

$$\text{Cov}(\hat{\beta}) = \left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \otimes \mathbf{I} \right] [\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma}] \left[\mathbf{X} (\mathbf{X}\mathbf{X}')^{-1} \otimes \mathbf{I} \right] = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}$$

Cont.

- Logo, $\hat{\beta} \sim N_{pq}(\beta, \Sigma_{\beta})$, em que $\Sigma_{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \otimes \Sigma$.
- Portanto, se Σ for conhecido (e conseqüentemente, Σ_{β}), então

$$(\hat{\beta} - \beta)' (\Sigma_{\beta})^{-1} (\hat{\beta} - \beta) \sim \chi^2_{(qp)}$$

- De modo semelhante ao caso univariado, a grande maioria das hipóteses de interesse, podem ser escritas na forma

$$H_0 : \mathbf{C}_{(r \times q)} \mathbf{B}_{(q \times p)} \mathbf{U}_{(p \times s)} = \mathbf{M}_{(r \times s)} \text{ vs } H_1 : \mathbf{CBU} \neq \mathbf{M}$$

em que $r \leq q$ e $s \leq p$.

Cont.

- Voltando ao exemplo da íris, se quisermos testar se as médias entre os grupos, em relação à variável CS (que é a variável 1), são simultaneamente iguais, teríamos (parametrização de médias):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{CBU} = \begin{bmatrix} \mu_{11} - \mu_{21} \\ \mu_{11} - \mu_{31} \end{bmatrix}$$

Cont.

- Voltando ao exemplo da íris, se quisermos testar se as médias entre os grupos, em relação à variável CS (que é a variável 1), são simultaneamente iguais, teríamos (parametrização casela de referências):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{CBU} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \alpha_{21} \\ \alpha_{11} - \alpha_{31} \end{bmatrix}$$

Cont.

- Note agora que $H_0 : \mathbf{U}'\mathbf{B}'\mathbf{C}' = \mathbf{M}'$ e, assim, temos que:

$$\text{vec}(\mathbf{U}'\mathbf{B}'\mathbf{C}') - \underbrace{\text{vec}(\mathbf{M}')}_{\mathbf{M}^*} = \underbrace{(\mathbf{C} \otimes \mathbf{U}')}_{\mathbf{C}^*} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{M}^* = \mathbf{C}^* \boldsymbol{\beta} - \mathbf{M}^*.$$
- Logo, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{C}^* \hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{M}^* \sim N_{rs} \left(\mathbf{C}^* \boldsymbol{\beta} - \mathbf{M}^*, \mathbf{C}^* \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{C}^{*'} \right).$
- Se $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}}$ for conhecido, e fazendo $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{C}^* \boldsymbol{\beta} - \mathbf{M}^*$, temos que

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})' (\mathbf{C}^* \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{C}^{*'})^{-1} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \sim \chi^2_{(rs)}$$

Cont.

- Considere, então, que $\widehat{\Sigma}$ é um estimador consistente de Σ , logo $\widehat{\Sigma}_\beta = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \otimes \widehat{\Sigma}$ o será para Σ_β .
- Assim, por Slutsky,

$$Q = \widehat{\theta}' \left(\mathbf{C}^* \widehat{\Sigma}_\beta \mathbf{C}^{*'} \right)^{-1} \widehat{\theta} \xrightarrow{D} \chi^2_{(rs, \delta)}$$

em que

$$\delta = (\mathbf{C}^* \beta - \mathbf{M}^*)' \left(\mathbf{C}^* \Sigma_\beta \mathbf{C}^{*'} \right)^{-1} (\mathbf{C}^* \beta - \mathbf{M}^*).$$

Mas, sob H_0 tem-se que $\delta = 0$.

Anovas univariadas

CS

FV	g.l.	SQ	QM	Estat. F	p-valor
Espécie	2	63,21	31,61	119,26	< 0,0001
Resíduos	147	38,96	0,27		

LS

FV	g.l.	SQ	QM	Estat. F	p-valor
Espécie	2	11,34	5,67	49,16	< 0,0001
Resíduos	147	16,96	0,12		

Anovas univariadas

CP

FV	g.l.	SQ	QM	Estat. F	p-valor
Espécie	2	437,10	218,55	1180,16	< 0,0001
Resíduos	147	27,22	0,19		

LP

FV	g.l.	SQ	QM	Estat. F	p-valor
Espécie	2	80,41	40,21	960,01	< 0,0001
Resíduos	147	6,16	0,04		

Comparações múltiplas

- Comparações de interesse (para $k = 1, 2, 3, 4$)

$$H_0 : \mu_{1k} = \mu_{2k} \text{ vs } H_1 : \mu_{1k} \neq \mu_{2k}$$

$$H_0 : \mu_{1k} = \mu_{3k} \text{ vs } H_1 : \mu_{1k} \neq \mu_{3k}$$

$$H_0 : \mu_{2k} = \mu_{3k} \text{ vs } H_1 : \mu_{2k} \neq \mu_{3k}$$

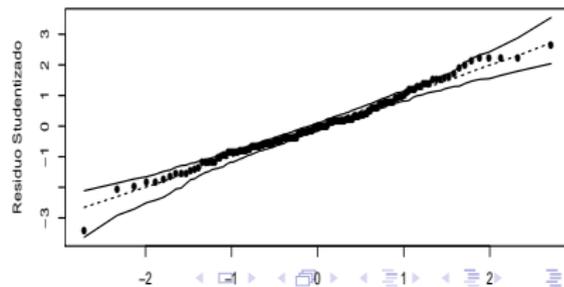
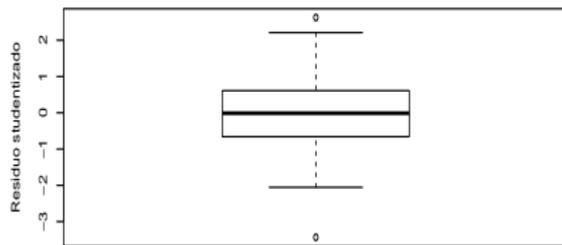
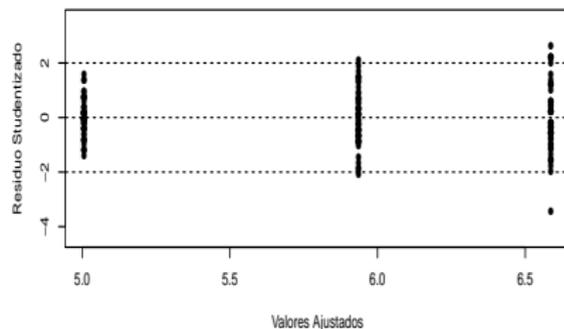
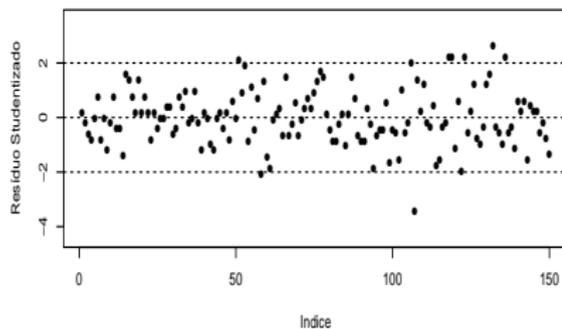
Resultados

- Estatística do teste e p-valor entre parênteses.
- Variável CS:
 - Setosa x Versicolor: 81,59 ($< 0,0001$).
 - Setosa x Virginica: 236,10 ($< 0,0001$).
 - Versicolor x Virgínica: 40,10 ($< 0,0001$).
- Variável LS:
 - Setosa x Versicolor: 93,81 ($< 0,0001$).
 - Setosa x Virginica: 44,60 ($< 0,0001$).
 - Versicolor x Virgínica: 9,02 ($0,0027$).

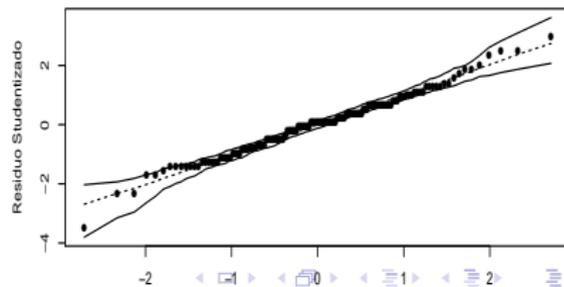
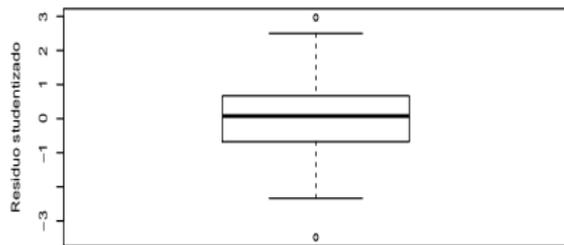
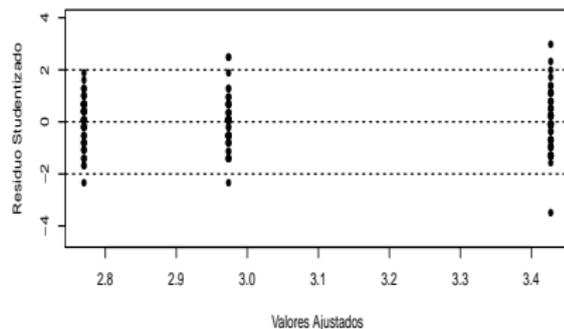
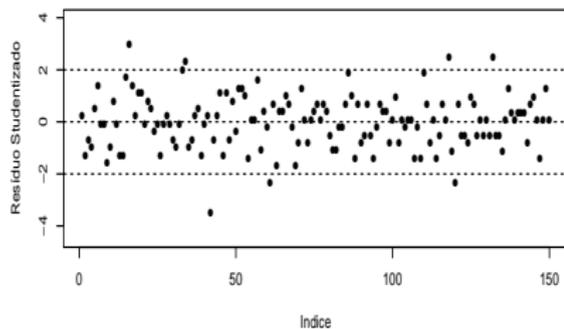
Resultados

- Estatística do teste e p-valor entre parênteses.
- Variável CP:
 - Setosa x Versicolor: 1056,87 ($< 0,0001$).
 - Setosa x Virginica: 2258,26 ($< 0,0001$).
 - Versicolor x Virgínica: 225,35 ($< 0,0001$).
- Variável LP:
 - Setosa x Versicolor: 696,25 ($< 0,0001$).
 - Setosa x Virginica: 1891,28 ($< 0,0001$).
 - Versicolor x Virgínica: 292,49 ($0,0027$).

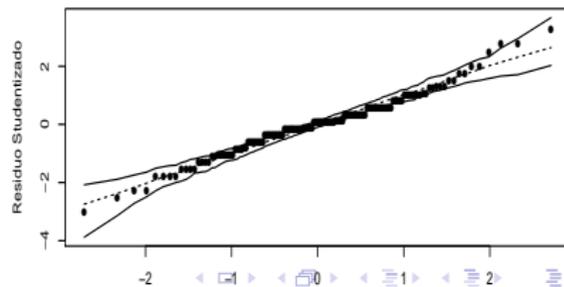
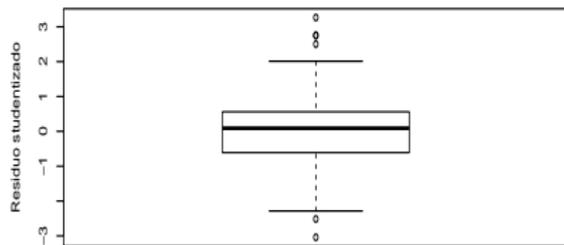
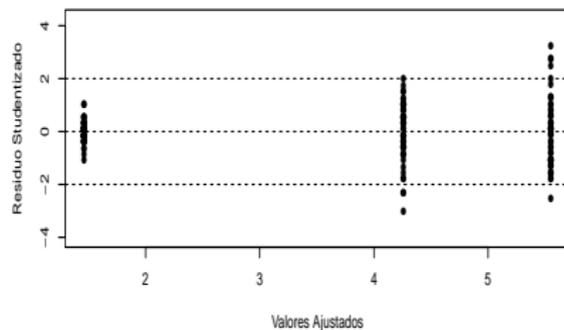
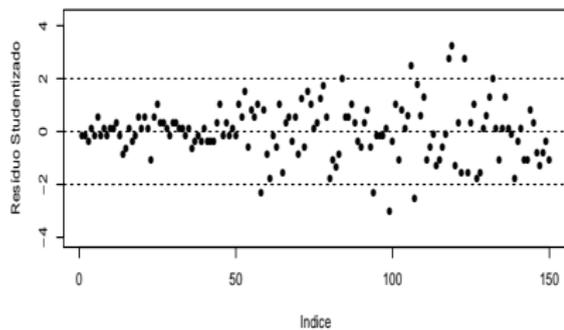
Análise de resíduos - univariada



Análise de resíduos - univariada



Análise de resíduos - univariada



Análise de resíduos - univariada

