Modelo normal linear multivariado

Prof. Caio Azevedo

Suposições

- Dados de Potthoff and Roy (Exemplo 2).
- Dois grupos (11 meninas e 16 meninos), quatro instantes de avaliação.
- Objetivo: comparação entre grupos e instantes.

- Seja Y_{ijk} : a distância medida no k-ésimo instante (k=1,2,3,4), para o j-ésimo indivíduo ($j = 1, ..., n_i$) do i-ésimo grupo ($i = 1, 2$), $n_1 = 11$ (meninas), $n_2 = 16$ (meninos).
- Suposição $\boldsymbol{Y}_{ij} = (Y_{ij1}, Y_{ij2}, Y_{ij3}, Y_{ij4}) \overset{ind.}{\sim} N_4(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma})$.

$$
\boldsymbol{Y}_{(n\times p)} = \begin{bmatrix}
Y_{111} & Y_{112} & Y_{113} & Y_{114} \\
Y_{121} & Y_{122} & Y_{123} & Y_{124} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
Y_{1(11)1} & Y_{1(11)2} & Y_{1(11)3} & Y_{1(11)4} \\
--- & --- & --- & --- \\
Y_{211} & Y_{212} & Y_{213} & Y_{214} \\
Y_{221} & Y_{222} & Y_{223} & Y_{224} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
Y_{2(16)1} & Y_{2(16)2} & Y_{2(16)3} & Y_{2(16)4}
\end{bmatrix}
$$

Suposições

- Suponha um conjunto de G populações independentes da qual retiramos G amostras de tamanho n_i, $i = 1, ..., G$,
- Por suposição, temos que $\boldsymbol{Y}_{ij} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma})$, em que i = 1, 2,...,G (grupo) e j = 1,2,...,n_i (indivíduo). Notação: Y_{ijk} observação referente à condição de avaliação k do indivíduo j do grupo i.
- Homocedasticidades: $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = ... = \boldsymbol{\Sigma}_G = \boldsymbol{\Sigma}$. Além disso, $\boldsymbol{\Sigma}$ tem de ser não estruturada (variâncias e covariâncias livres).

Suposições

- Matriz de covariâncias não estruturada: $\boldsymbol{\Sigma} = Cov(\boldsymbol{Y}) = \mathcal{E}[(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu})'] = \mathcal{E}(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}') - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}' = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & \ldots & \sigma_p^2 \end{bmatrix}$
- Os dados têm de ser balanceados (em relação às condições de avaliação) e completos (podem ser regulares ou irregulares).
- Assim, temos a seguinte matriz de dados ($n = \sum_{i=1}^{G} n_i$):

$$
\boldsymbol{Y}_{(n \times p)} = \begin{bmatrix}
Y_{111} & Y_{112} & \ldots & Y_{11p} \\
Y_{121} & Y_{122} & \ldots & Y_{12p} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
Y_{1n_1 1} & Y_{1n_1 2} & \ldots & Y_{1n_1 p} \\
--- & --- & --- & --- \\
Y_{211} & Y_{212} & \ldots & Y_{21p} \\
Y_{221} & Y_{222} & \ldots & Y_{22p} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
Y_{2n_2 1} & Y_{2n_2 2} & \ldots & Y_{2n_2 p} \\
--- & --- & --- & --- \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
--- & --- & --- & --- \\
Y_{G11} & Y_{G12} & \ldots & Y_{G1p} \\
Y_{G21} & Y_{G22} & \ldots & Y_{G2p} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
Y_{Gn_G 1} & Y_{Gn_G 2} & \ldots & Y_{Gn_G p}
\end{bmatrix}
$$

- Queremos testar

  $H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = ... = \boldsymbol{\mu}_G$ vs H_1 : pelo menos uma diferença.

- Uma abordagem: análise de variância multivariada (MANOVA).
- Comparar médias atráves do estudo da decomposição da matriz de variâncias-covariâncias total.
- Como resumir a informação das matrizes de covariâncias de interesse? Variâncias generalizadas.

Modelo linear normal multivariado

$$\boldsymbol{Y}_{(n \times p)} = \boldsymbol{X}_{(n \times q)} \boldsymbol{B}_{(q \times p)} + \boldsymbol{\xi}_{(n \times p)}$$

- $\boldsymbol{Y}_{(n \times p)}$: matriz de dados
- $\boldsymbol{X}_{(n \times q)}$: matriz de planejamento, conhecida e não-aleatória.
- $\boldsymbol{B}_{(qxp)}$: parâmetros de interesse , desconhecido e não aleatório.
- $\boldsymbol{\xi}_{(n \times p)}$: matriz de resíduos, $\boldsymbol{\xi}_{ij} \overset{ind.}{\sim} N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, logo $\boldsymbol{Y}_{ij} \overset{ind.}{\sim} N_p(\boldsymbol{X}_{ij}, \boldsymbol{\Sigma})$, em que $\boldsymbol{X}_{ij}$ é a linha da matriz $\boldsymbol{X}$ correspondente ao indivíduo j do grupo i.

$$
\boldsymbol{X}_{(n\times q)} = \begin{bmatrix}
X_{111} & X_{112} & \ldots & X_{11G} \\
X_{121} & X_{122} & \ldots & X_{12G} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
X_{1n_1 1} & X_{1n_1 2} & \ldots & X_{1n_1 G} \\
--- & --- & --- & --- \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
--- & --- & --- & --- \\
X_{G11} & X_{G12} & \ldots & X_{G1G} \\
X_{G21} & X_{G22} & \ldots & X_{G2G} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
X_{Gn_G G} & X_{Gn_G G} & \ldots & X_{Gn_G G}
\end{bmatrix};
\boldsymbol{B}_{(q\times p)} = \begin{bmatrix}
\mu_{11} & \mu_{12} & \ldots & \mu_{1p} \\
\mu_{21} & \mu_{22} & \ldots & \mu_{2p} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mu_{G1} & \mu_{G2} & \ldots & \mu_{Gp}
\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{\xi}_{(n\times p)} = \begin{bmatrix}
\xi_{111} & \xi_{112} & \cdots & \xi_{11p} \\
\xi_{121} & \xi_{122} & \cdots & \xi_{12p} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\xi_{1n_1 1} & \xi_{1n_1 2} & \cdots & \xi_{1n_1 p} \\
--- & --- & --- & --- \\
\xi_{211} & \xi_{212} & \cdots & \xi_{21p} \\
\xi_{221} & \xi_{222} & \cdots & \xi_{22p} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\xi_{2n_2 1} & \xi_{2n_2 2} & \cdots & \xi_{2n_2 p} \\
--- & --- & --- & --- \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
--- & --- & --- & --- \\
\xi_{G11} & \xi_{G12} & \cdots & \xi_{G1p} \\
\xi_{G21} & \xi_{G22} & \cdots & \xi_{G2p} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\xi_{Gn_G 1} & \xi_{Gn_G 2} & \cdots & \xi_{Gn_G p}
\end{bmatrix}
$$

Nosso exemplo:

- Temos: G $= 2$, p $= 4$, $n_1 = 11, n_2 = 16$, (2 grupos, quatro instantes, 11 e 16 indivíduos por grupo, respectivamente).
- Modelar as médias.
- $\boldsymbol{Y}_{(27 \times 4)}$.

Nosso exemplo: parametrização de médias

- $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{(11\times 1)} & \mathbf{0}_{(11\times 1)} \\ \mathbf{0}_{(16\times 1)} & \mathbf{1}_{(16\times 1)} \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \mu_{24} \end{bmatrix}$
- μ_{ip} : média da distância na condição de avaliação p do grupo i.

Nosso exemplo: parametrização casela de referência (grupo feminino):

- $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{(11\times 1)} & \mathbf{0}_{(11\times 1)} \\ \mathbf{1}_{(16\times 1)} & \mathbf{1}_{(16\times 1)} \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \mu_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{bmatrix}$
- μ_{1p} : média da distância na condição de avaliação p do grupo *1* (grupo de referência).

Decomposição da matriz de covariâncias total

- Pode-se demonstrar que (fazendo $\overline{\boldsymbol{Y}}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\boldsymbol{Y}_{ij}$, $\overline{\boldsymbol{Y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{G}\sum_{j=1}^{n_i}\boldsymbol{Y}_{ij}$):

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{i=1}^{G}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\boldsymbol{Y}_{ij} - \overline{\boldsymbol{Y}}\right)\left(\boldsymbol{Y}_{ij} - \overline{\boldsymbol{Y}}\right)'}_{\text{Matriz de SQ Total}} &= \underbrace{\sum_{i=1}^{G} n_i\left(\overline{\boldsymbol{Y}}_i - \overline{\boldsymbol{Y}}\right)\left(\overline{\boldsymbol{Y}}_i - \overline{\boldsymbol{Y}}\right)'}_{\text{Matriz de SQ do Modelo}} \\
&+ \underbrace{\sum_{i=1}^{G}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\boldsymbol{Y}_{ij} - \overline{\boldsymbol{Y}}_i\right)\left(\boldsymbol{Y}_{ij} - \overline{\boldsymbol{Y}}_i\right)'}_{\text{Matriz de SQ do Resíduo}} \\
\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{M} + \boldsymbol{E}
\end{aligned}
$$

Variância generalizada

- Seja $\mathbf{\Sigma}_{(p \times p)}$ uma matriz de covariâncias.
- Variância generalizada $|\mathbf{\Sigma}|$ (resume a informação contida em $\mathbf{\Sigma}$).
- Suponha p = 2.
- Assim $|\mathbf{\Sigma}| = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{11}^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2\rho^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$.
- Estamos supondo que $\mathbf{\Sigma}_1 = \mathbf{\Sigma}_2 = ... = \mathbf{\Sigma}_G = \mathbf{\Sigma}$ (teste de Box para igualdade de matrizes de covariâncias).

As quatro estatísticas “tradicionais”

- Sejam $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_s$ os autovalores diferentes de zero da matriz $\boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{M}$, em que $s = min(p, G-1)$.
- Lambda de Wilkis : $\prod_{i=1}^{s} \frac{1}{1+\lambda_i} = \frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{M}|}$.
- Traço de Pillai: $\sum_{i=1}^{s} \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i} = tr[\boldsymbol{M}(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{E})^{-1}]$.
- Traço de Lawley-Hotelling: $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^{-1} = tr[\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}^{-1}]$
- Máxima raiz de Roy: $\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}$

Cont.

- Quanto menor for o valor das estatística de Wilks e maior forem os valores das estatísticas de Pillai, Lawley-Hotelling e de Roy, mais evidências tem-se contra H_0.
- Existem aproximações pela distribuição F, para cada uma destas estatísticas (pesquisar).
- Verificação da normalidade multivariada: Se $\boldsymbol{Y}_{ij} \overset{ind.}{\sim} N_p(\boldsymbol{X}_{ij}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Sigma})$, então para n suficientemente grande:

$$
\begin{aligned}
& \frac{n}{n-1}\left(\boldsymbol{Y}_{ij} - \overline{\boldsymbol{Y}}_i\right)'\left(\boldsymbol{S}_i^2\right)^{-1}\left(\boldsymbol{Y}_{ij} - \overline{\boldsymbol{Y}}_i\right) \\
\approx \quad & \left(\boldsymbol{Y}_{ij} - \overline{\boldsymbol{Y}}_i\right)'\left(\boldsymbol{S}_i^2\right)^{-1}\left(\boldsymbol{Y}_{ij} - \overline{\boldsymbol{Y}}_i\right) \sim \chi^2_{(p)}
\end{aligned}
$$

Teste para verificar a homocedasticidade

- Queremos testar se $H_0 : \Sigma_1 = ... = \Sigma_G$ vs
  H_1 : há pelo menos uma diferença.
- A estatística do t.r.v, é tal que (exercício):

$$
\begin{aligned}
\Lambda &\propto \prod_{i=1}^{G} \left[\frac{|\boldsymbol{S}_i^2|}{|\boldsymbol{S}_P^2|} \right]^{(n_i - 1)/2} \\
\boldsymbol{S}_P^2 &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{G} (n_i - 1)} \left[\sum_{i=1}^{G} (n_i - 1) \boldsymbol{S}_i^2 \right] ; \boldsymbol{S}_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\overline{\boldsymbol{Y}}_i - \boldsymbol{Y}_{ij} \right) \left(\overline{\boldsymbol{Y}}_i - \boldsymbol{Y}_{ij} \right)'
\end{aligned}
$$

- Sob H_0, $-2\ln\Lambda \approx \chi^2_{(\nu)}$, em que $\nu = (G-1)p(p+1)/2$.
- Correção proposta por Box para melhorar a performance da estatística acima é:

$$
\begin{aligned}
Q_B &= (1-u)(-2\ln\Lambda) = \\
&= (1-u)\left\{\left[\sum_{i=1}^{G}(n_i-1)\right]\ln|\boldsymbol{S}_P^2| - \sum_{i=1}^{G}\left[(n_i-1)\ln|\boldsymbol{S}_i^2|\right]\right\}
\end{aligned}
$$

em que
$u = \left[\sum_{i=1}^{G}\frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{G}(n_i-1)}\right]\left[\frac{2p^2+3p-1}{6(p+1)(g-1)}\right]$

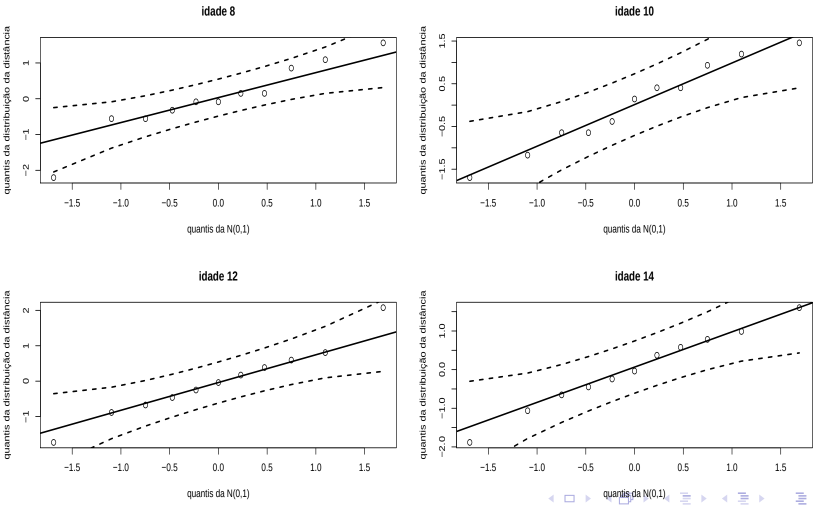
- Sob H_0, $Q_B \approx \chi^2_{(u)}$.

Teste para verificar a homocedasticidade

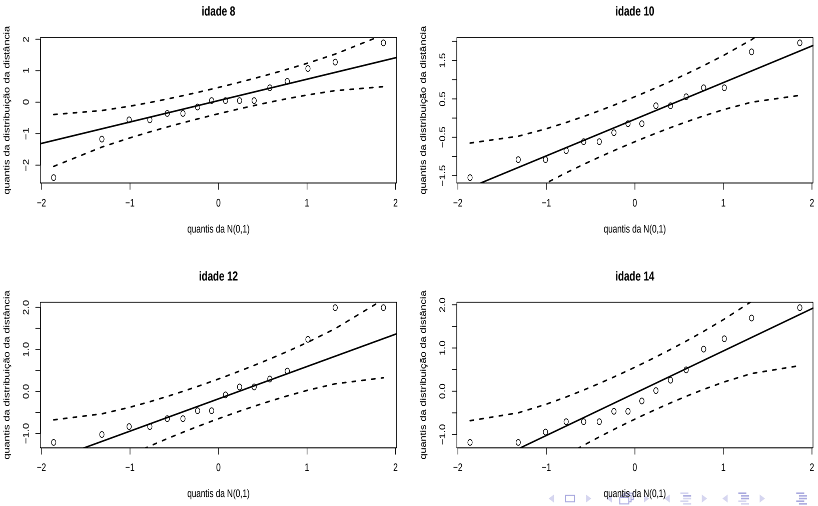
- Resultados: $q_{B(calc)} = 17,33(0,0673)$.
- Estimativas das matrizes de covariâncias:

grupo	d8	d10	d12	d14
1	4,51	3,35	4,33	4,36
1	3,35	3,62	4,03	4,08
1	4,33	4,03	5,59	5,47
1	4,36	4,08	5,47	5,94
2	6,02	2,29	3,63	1,61
2	2,29	4,56	2,19	2,81
2	3,63	2,19	7,03	3,24
2	1,61	2,81	3,24	4,35

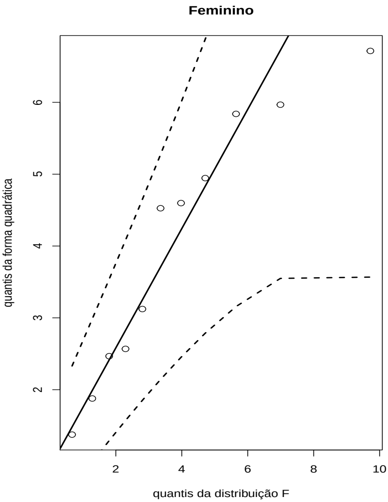
Gráficos de quantis-quantis com envelope (feminino)

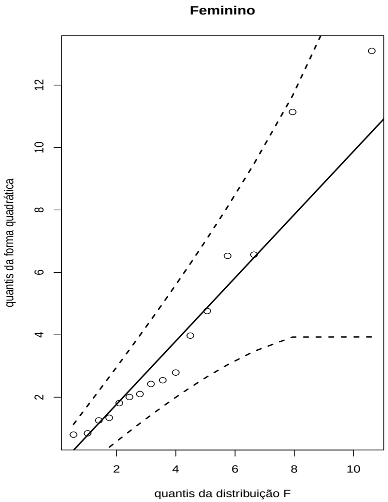


Gráficos de quantis-quantis com envelope (masculino)



Gráficos de quantis-quantis para a forma quadrática





Estatísticas

Estatística	Valor	Aproxim. pela dist. F.	p-valor
Wilks	0,602	3,632	0,0203
Pillai	0,398	3,632	0,0203
Hotelling-Lawley	0,6603	3,632	0,0203
Roy	0,6603	3,632	0,0203

A igualdade simultânea dos vetores de médias é rejeitada (marginalmente), para cada uma das estatísticas. Como realizar outras comparações de interesse?

Anova para cada variável

- Idade de 8 anos: f = 3,451 (0,0751).
- Idade de 10 anos: f = 3,914 (0,0600).
- Idade de 12 anos: f = 6,973 (0,0141).
- Idade de 14 anos: f = 14,918 (0,0008).

Forma vetorial

- Considere novamente o modelo: $\boldsymbol{Y}_{(n \times p)} = \boldsymbol{X}_{(n \times q)} \boldsymbol{B}_{(qxp)} + \boldsymbol{\xi}_{(n \times p)}$.

  Assim, note que:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}'_{(p \times n)} &= \boldsymbol{B}'_{(p \times q)} \boldsymbol{X}'_{(q \times n)} + \boldsymbol{\xi}'_{(p \times n)} \\
vec(\boldsymbol{Y}) &= \left(\boldsymbol{X}_{(n \times q)} \otimes \boldsymbol{I}_p\right) vec(\boldsymbol{B}') + vec(\boldsymbol{\xi}') \\
\boldsymbol{Y}^*_{(np \times 1)} &= \boldsymbol{X}^*_{(np \times pq)} \boldsymbol{\beta}_{(pq \times 1)} + \boldsymbol{\xi}^*_{(np \times 1)}
\end{aligned}
$$

  pois $vec(\boldsymbol{ABC}) = (\boldsymbol{C}' \otimes \boldsymbol{A}) vec(\boldsymbol{B})$.

- Note, assim, que as observações dos indivíduos foram concatenadas (uma abaixo da outra), nos vetores $\boldsymbol{Y}^*$ e $\boldsymbol{\xi}^*$.

Cont.

- Portanto, temos que $\boldsymbol{Y}^* \sim N_{pn}(\boldsymbol{X}^*\beta, \boldsymbol{\Sigma}^*)$, em que $\boldsymbol{\Sigma}^* = \boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{(p\times p)}$
- O estimador de mínimos quadrados generalizados de β é obtido minimizando-se

$$(\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{X}^*\beta)'\boldsymbol{\Sigma}^{*-1}(\boldsymbol{Y}^* - \boldsymbol{X}^*\beta).$$

- O que implica que $\widehat{\beta} = \left(\boldsymbol{X}^{*'}\boldsymbol{\Sigma}^{*-1}\boldsymbol{X}^*\right)^{-1}\boldsymbol{X}^{*'}\boldsymbol{\Sigma}^{*-1}\boldsymbol{Y}^*$

Cont.

- Note que

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= \left[(\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{I})' (\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma})^{-1} (\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{I})\right]^{-1} (\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{I})' (\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \boldsymbol{Y}^* \\
&= \left[\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right)\right]^{-1} \left[\boldsymbol{X}' \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right] \boldsymbol{Y}^* \\
&= \left[\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}' \otimes \boldsymbol{I}\right] \boldsymbol{Y}^* \\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}^* \qquad (1)
\end{aligned}$$

- Por outro lado, temos que
$\mathcal{E}(\widehat{\beta}) = \left[\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}' \otimes \boldsymbol{I}\right] [\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{I}] \beta = \beta.$
- Além disso,

$$Cov(\widehat{\beta}) = \left[\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}' \otimes \boldsymbol{I}\right] [\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma}] \left[\boldsymbol{X} \left(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}'\right)^{-1} \otimes \boldsymbol{I}\right] = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}$$

Cont.

- Logo, $\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_{pq}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}})$, em que $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}$.
- Portanto, se $\boldsymbol{\Sigma}$ for conhecido (e consequentemente, $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}}$), então

$$\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right)' (\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}})^{-1} \left(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right) \sim \chi^2_{(qp)}$$

- De modo semelhante ao caso univariado, a grande maioria das hipóteses de interesse, podem ser escritas na forma

$$H_0 : \boldsymbol{C}_{(r \times q)} \boldsymbol{B}_{(q \times p)} \boldsymbol{U}_{(p \times s)} = \boldsymbol{M}_{(r \times s)} \ vs \ H_1 : \boldsymbol{CBU} \neq \boldsymbol{M}$$

em que $r \leq q$ e $s \leq p$.

Cont.

- Note agora que $H_0 : \boldsymbol{U}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{M}'$ e, assim, temos que:

$$vec(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}') - \underbrace{vec(\boldsymbol{M}')}_{\boldsymbol{M}^*} = \underbrace{\left(\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{U}'\right)}_{\boldsymbol{C}^*}\beta - \boldsymbol{M}^* = \boldsymbol{C}^*\beta - \boldsymbol{M}^*.$$

- Logo, $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{C}^*\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{M}^* \sim N_{rs}\left(\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{M}, \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{C}^{*'}\right)$.
- Se $\boldsymbol{\Sigma}_\beta$ for conhecido, e fazendo $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{M}^*$, temos que, sob H_0

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}'\left(\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{C}^{*'}\right)^{-1}\widehat{\boldsymbol{\theta}} \sim \chi^2_{(rs)}$$

Cont.

- Considere, então, que $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ é um estimador consistente de $\boldsymbol{\Sigma}$, logo $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \otimes \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$ o será para $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}}$.
- Assim, por Slutsky,

$$Q = \widehat{\boldsymbol{\theta}}' \left(\boldsymbol{C}^* \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{C}^{*'}\right)^{-1} \widehat{\boldsymbol{\theta}} \xrightarrow[n \to \infty]{D} \chi^2_{(rs,\delta)}$$

em que

$\delta = (\boldsymbol{C}^*\beta - \boldsymbol{M}^*)' \left(\boldsymbol{C}^* \boldsymbol{\Sigma}_{\beta} \boldsymbol{C}^{*'}\right)^{-1} (\boldsymbol{C}^*\beta - \boldsymbol{M}^*)$.

Mas, sob H_0 tem-se que $\delta = 0$.

Cont.

- Nível descritivo: $P(Q > q_{calc}|H_0)$, em que $Q \approx \chi^2_{(rs)}$, para n suficientemente grande e q_{calc} é o valor calculado da estatística Q.
- Função poder: $P(Q > q_c|H_1, \alpha)$, em que $Q \approx \chi^2_{(rs)}$ para n suficientemente grande e q_c é o valor crítico para um dado α (nível de significância).
- Assim, o poder estimado do teste é dado por: $P(\widetilde{Q} > q_c|H_1, \alpha)$, em que $\widetilde{Q} \approx \chi^2_{(rs,\widetilde{\delta})}$ para n suficientemente grande e q_c é o valor crítico para um dado α (nível de significância) e $\widetilde{\delta} = \left(\boldsymbol{C}^*\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{M}^*\right)' \left(\boldsymbol{C}^*\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{C}^{*'}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{C}^*\widetilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{M}^*\right)$ e "$\sim$" representa a respectiva estimativa.

Igualdade entre as médias por gênero em cada tempo

- Hipóteses:
  - $(1) H_0 : \mu_{11} = \mu_{21}$.
  - $(2) H_0 : \mu_{12} = \mu_{22}$.
  - $(3) H_0 : \mu_{13} = \mu_{23}$.
  - $(4) H_0 : \mu_{14} = \mu_{24}$.
- Para todas as hipóteses (como estamos usando a parametrização casela de referência) temos que $\boldsymbol{M} = 0_{(1 \times 1)}$ e $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$. Note que $\boldsymbol{CB} = \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{bmatrix}$.

Igualdade entre as médias por gênero em cada tempo

- Assim
  - $(1)\boldsymbol{U}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - $(2)\boldsymbol{U}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - $(3)\boldsymbol{U}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
  - $(4)\boldsymbol{U}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Resultados
  - (1) $q_{calc} = 3,45(0,0632)$.
  - (2) $q_{calc} = 3,91(0,0479)$.
  - (3) $q_{calc} = 6,97(0,0083)$.
  - (4) $q_{calc} = 14,92(< 0,0001)$.

Igualdade entre as médias de idades consecutivas por gênero

- Hipóteses (gênero feminino):
  - $(1) H_0 : \mu_{11} = \mu_{12}$.
  - $(2) H_0 : \mu_{12} = \mu_{13}$.
  - $(3) H_0 : \mu_{13} = \mu_{14}$.
- Hipóteses (gênero masculino):
  - $(1) H_0 : \mu_{21} = \mu_{22}$.
  - $(2) H_0 : \mu_{22} = \mu_{23}$.
  - $(3) H_0 : \mu_{23} = \mu_{24}$.

Cont.

- Em todos os casos $\boldsymbol{M} = 0$, $\boldsymbol{CB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ (gênero feminino) e $\boldsymbol{CB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ (gênero masculino).
- Além disso,
  - $(1)\boldsymbol{U}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - $(2)\boldsymbol{U}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
  - $(3)\boldsymbol{U}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Cont.

- Resultados (gênero feminino)
  - (1) $q_{calc} = 2,89(0,0894)$.
  - (2) $q_{calc} = 1,71(0,1904)$.
  - (3) $q_{calc} = 3,46(0,0629)$.
- Resultados (gênero masculino)
  - (1) $q_{calc} = 3,38(0,0662)$.
  - (2) $q_{calc} = 12,15(< 0,0001)$.
  - (3) $q_{calc} = 15,41(< 0,0001)$.