

# Modelos lineares generalizados hierárquicos: parte 3

Prof. Caio Azevedo

## Voltando ao Exemplo 4 (ataques epiléticos)

- **Vimos** que o ajuste do MLGH de Poisson, não foi bom.
- Conjecturou-se a possibilidade dos dados apresentarem **superdispersão**. Portanto, a despeito de outros aspectos (covariáveis, função de ligação, estrutura dos efeitos aleatórios) a distribuição de Poisson pode não ser apropriada.
- Uma alternativa é o **modelo binomial negativo** (BN) [não está na classe dos MLG's (hierárquicos)].
- Consideraremos a parametrização apresentada **aqui**.

## Modelo BN de dois níveis para os dados do Exemplo 4

$$Y_{jik} | u_{0j} \stackrel{ind.}{\sim} \text{BN}(\mu_{jik} / t_i, \phi) \text{ (nível 1)}$$

$$\mathcal{E}(Y_{jik} | u_{0j}) = \mu_{jik}, \quad \mathcal{V}(Y_{jik} | u_{0j}) = \mu_{jik} + \frac{\mu_{jik}^2}{\phi}$$

$$\ln(\mu_{jik} / t_i) = \mu_j + \alpha_k + (\beta_1 + \delta_k)(x_{jik} - x), \quad \alpha_1 = 0, \delta_1 = 0$$

$$\ln(\mu_{jik}) = \ln(t_i) + \mu_j + \alpha_k + (\beta_1 + \delta_k)(x_{jik} - x) \text{ (nível 1),}$$

$$\mu_j = \mu + u_{0j} \text{ (nível 2)}$$

$u_{0j} \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, \psi)$ ,  $k = 1, 2$  (grupo, 1 – placebo, 2 – progabide),

$j = 1, \dots, n_i$  (indivíduo,  $n_1 = 28$ ;  $n_2 = 31$ ),  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  (período).

- $Y_{jik}$ : número de ataques do  $j$ -ésimo paciente, do  $k$ -ésimo grupo no  $i$ -ésimo período.

## Cont.

- $t_i$ : número de semanas relativas ao  $i$ -ésimo período.
- $\ln(t_i)$ : “offset”.
- $x_{jik}$ : número de semanas acumuladas ou período correspondente ao  $i$ -ésimo instante de avaliação ( $x$  é um valor de referência, podendo ser um período específico ou um número específico de semanas acumuladas).
- $\mu_{jik} = t_i e^{\mu + \alpha_k + \beta_k(x_{jik} - x)} e^{u_{0j}}$ .
- $\mu_{jik}^* = t_i e^{\mu + \alpha_k + \beta_k(x_{jik} - x)} \mathcal{E}(e^{u_{0j}})$ .

## Cont.

- $\mu_{jik}^* | (x_{jik} = x) = t_i e^{\mu + \alpha_k} \mathcal{E}(e^{u_{0j}}).$
- $\mu_{ji1}^* | (x_{ji1} = x) = t_i e^{\mu} \mathcal{E}(e^{u_{0j}}).$
- $\mu_{jik}^* | (x_{jik}^* = x_{jik} + 1) = t_{i+1} e^{\mu + \alpha_k + \beta_k(x_{jik} - x)} e^{\beta_i} \mathcal{E}(e^{u_{0j}}).$
- As outras quantidades são como definidas [aqui](#).
- Exercício: calcular as formas analíticas da esperança, variância e correlações marginais.

# Aspectos inferenciais e computacionais

- A estimação (pontual e intervalar), testes de hipótese e análise residual frequentistas podem ser feitas de forma semelhante aos [MLGH](#).
- A função `glmer` não dispõe da opção de ajuste de MLGH BN. Contudo, no mesmo pacote (`lme4`) há a função `glmer.nb`.
- Entretanto, há evidências que a função `glmer.nb` apresenta problemas de convergência e qualidade das estimativas ([aqui](#)).

# Aspectos inferenciais e computacionais

- Alternativa: função `glmmadmb` do pacote `glmmADMB` (veja também, o site do curso): mais estável e com melhores resultados.
- Com efeito, realizou-se um pequeno estudo de simulação no qual constatou-se os supracitados comportamentos.
- Exercício: fazer um estudo de simulação comparando os dois pacotes, para o ajuste do modelo linear generalizado hierárquico BN.

# Aspectos inferenciais e computacionais

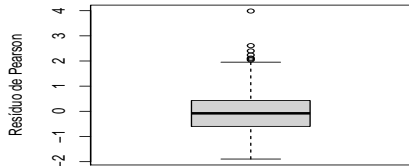
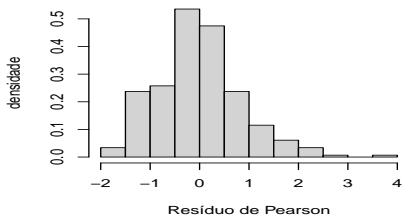
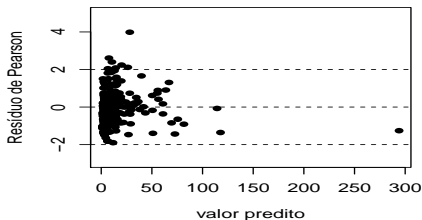
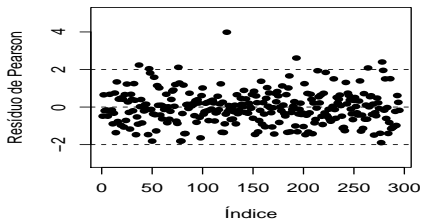
- A função `glmmadmb` tem implementados, apenas, os resíduos de Pearson e ordinário.
- Não é difícil implementar o resíduo componente do desvio (RCD) ([veja](#)) bem como outros [tipos de resíduos](#).
- Exercício: implementar uma função que faça os quatro gráficos usuais bem como o gráfico de quantil quantil com envelopes simulados par o RCD do MLGH BN.



## Resultados do ajuste do MLGH BN

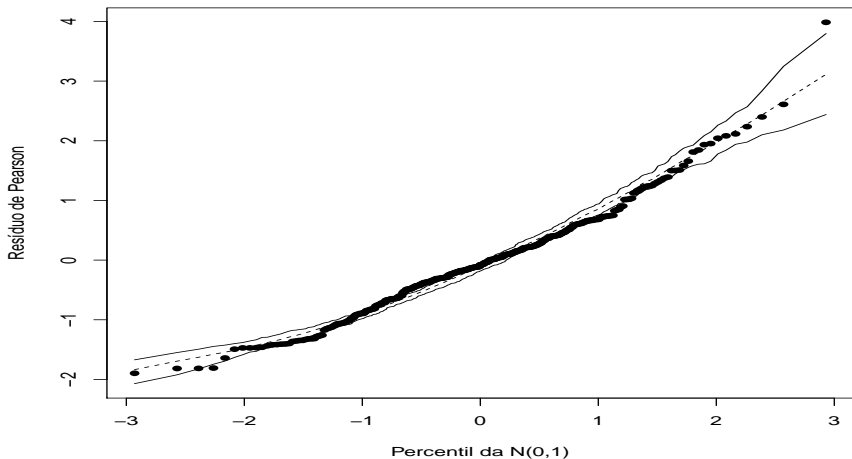
- Ajustou-se o MLGH BN via função `glmmadmb`.
- Critérios de informação: AIC = 1790,08 ; BIC = 1812,20; AICC = 1778,37; HQIC = 1798,94; CAIC = 1818,20; SABIC = 1793,18 (BN); AIC = 973,15; BIC = 991,58; AICC = 963,36; HQIC = 980,53; CAIC = 996,58; SABIC = 975,73 (Poisson). Neste caso, é evidente que os CI são falhos.
- Estimativa do parâmetro de precisão ( $\phi$ ): 6,85 (1,16) [4,58;9,12] (evidência de superdispersão-estimativa de baixa magnitude).
- Gráficos de resíduos e efeitos aleatórios nos slides seguintes.

# Gráficos de diagnóstico (Resíduo de Pearson - RP)

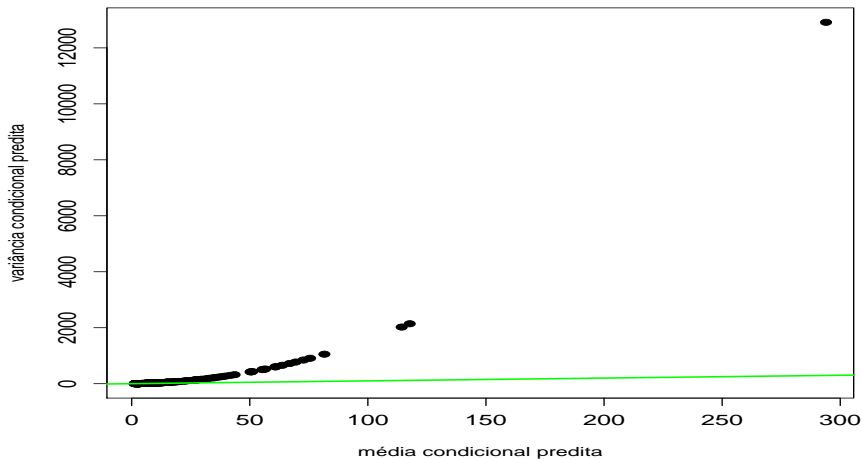


# QQplot com envelopes simulados (RP)

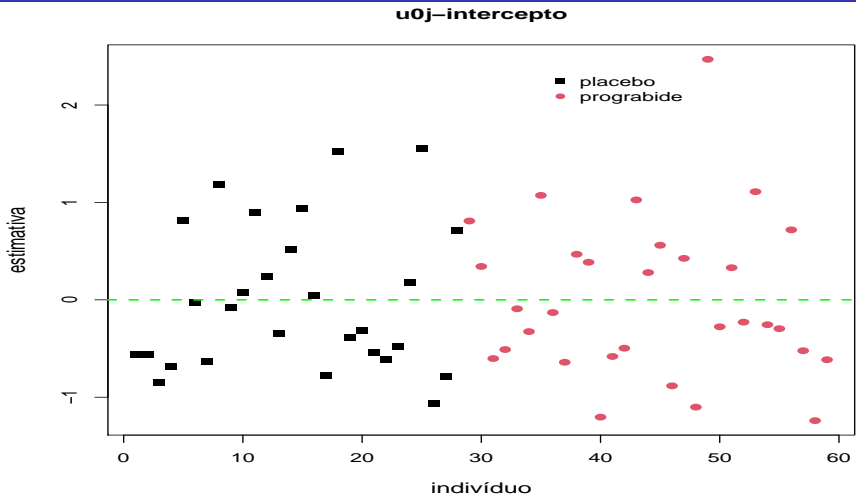
Gráfico de quantil-quantil normal



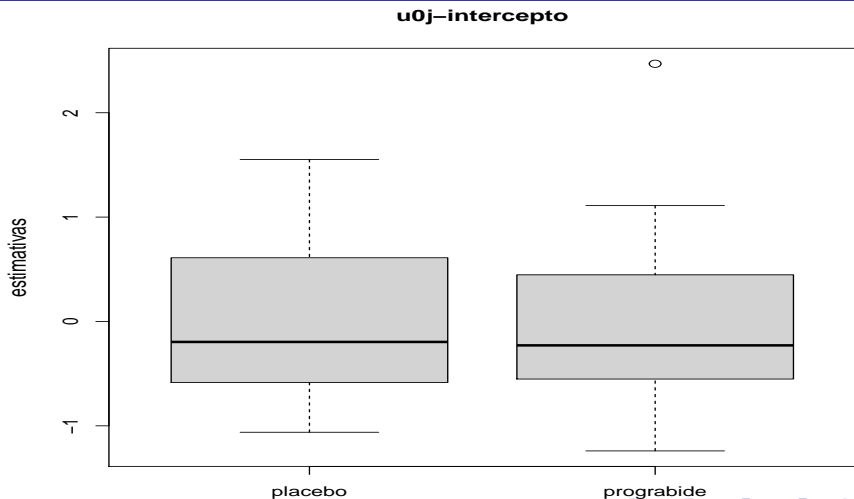
# Dispersão entre médias e variâncias condicionais



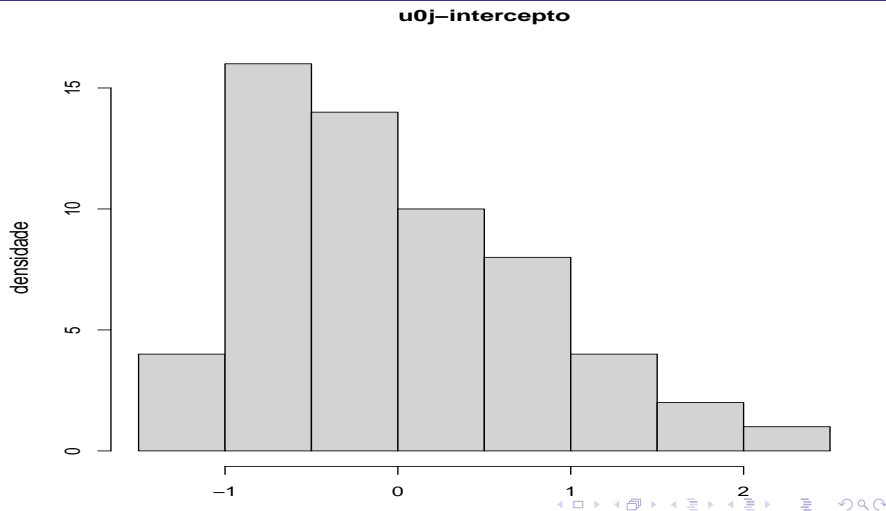
# Dispersão dos efeitos aleatórios por grupo



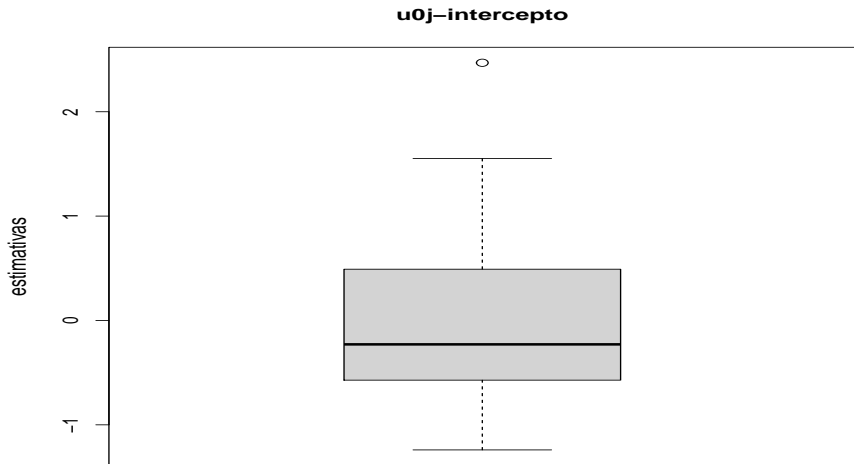
# Box plot dos efeitos aleatórios por grupo



# Histograma dos efeitos aleatórios

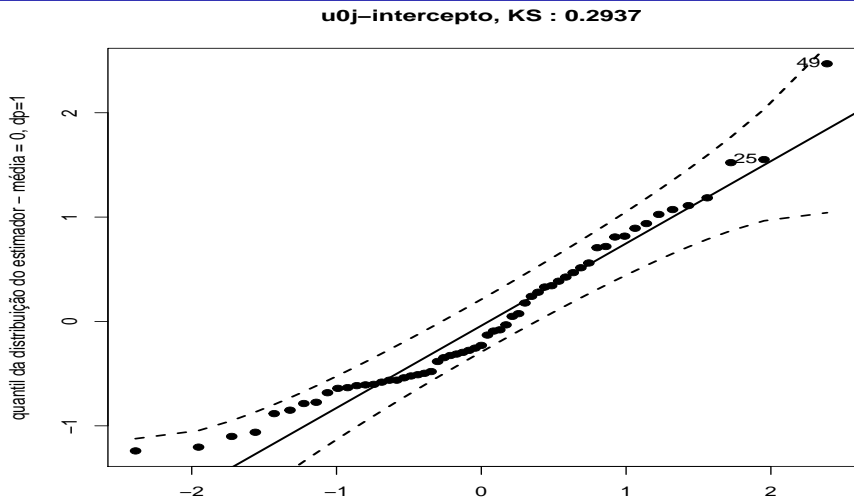


# Box plot dos efeitos aleatórios





# QQplot dos efeitos aleatórios



# Estimativas

Parâmetro	Estimativa	EP	LIIC ; LSIC	Estat. z	p-valor
$\mu$	1,14	0,17	[0,81 ; 1,47]	6,74	<0,0001
$\alpha_2$	-0,00	0,23	[-0,46 ; 0,45]	-0,01	0,9903
$\beta_1$	-0,01	0,03	[-0,08 ; 0,05]	-0,47	0,6370
$\delta_2$	-0,08	0,04	[-0,17 ; 0,01]	-1,84	0,0663

$$\tilde{\psi} = 0,655.$$

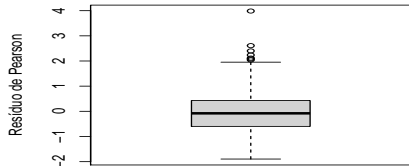
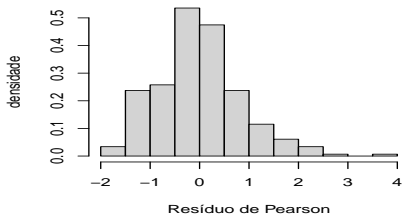
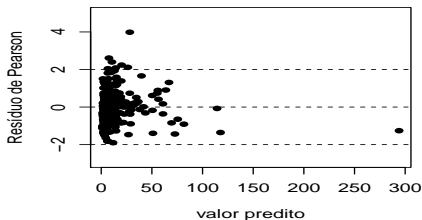
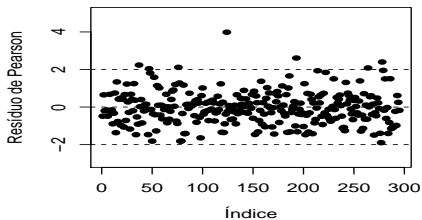
# Estimativas

- As conclusões aqui obtidas são semelhantes às aquelas obtidas para o modelo de Poisson, ou seja: que os pacientes dos dois grupos são equivalentes no primeiro período ( $\alpha_2 = 0$ ), que a droga tem um efeito (marginal) decrescente no número de ataques ( $\delta_2 = -0,08$ ) e que não há um “efeito placebo” ( $\beta_1 = 0$ ).
- Além disso, os efeitos aleatórios parecem ser significativos ( $\tilde{\psi} = 0,655$ ).

# Estimativas

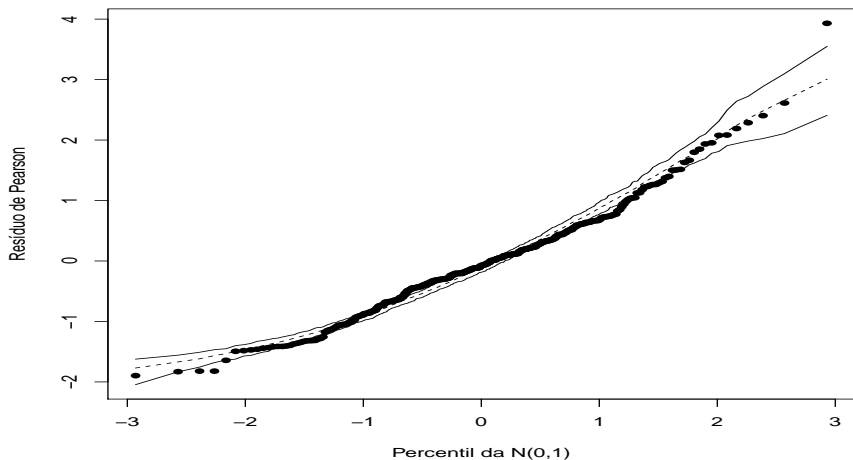
- O modelo parece não ter se ajustado bem (distribuição condicional da resposta dados os efeitos aleatórios) apesar de ter apresentado um ajuste melhor do que o MLGH de Poisson.
- Contudo, os resultados indicam presença de superdispersão e outros modelos podem ser considerados ([aqui](#)). Por exemplo, um modelo BN de dispersão variável e/ou com alguma outra distribuição de Poisson generalizada.
- Apesar do modelo (BN) inicial não ter se ajustado bem, vamos considerar um modelo reduzido (MR) com ( $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ )

# Gráficos de diagnóstico (Resíduo de Pearson - RP) MR

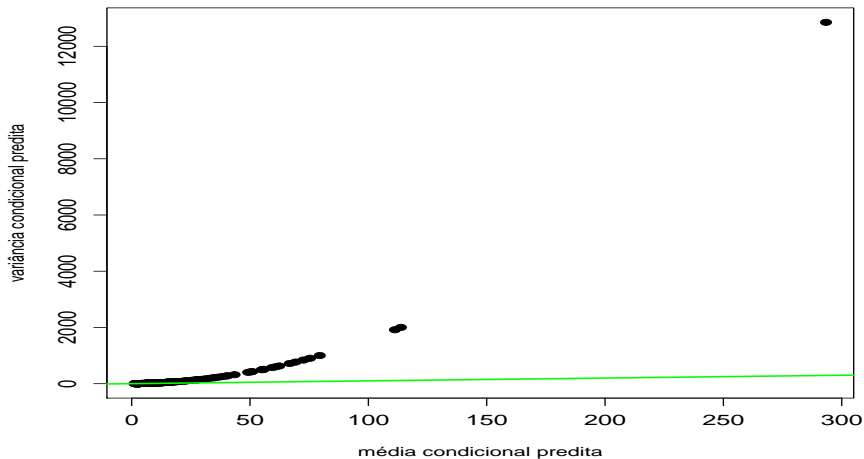


# QQplot com envelopes simulados (RP) MR

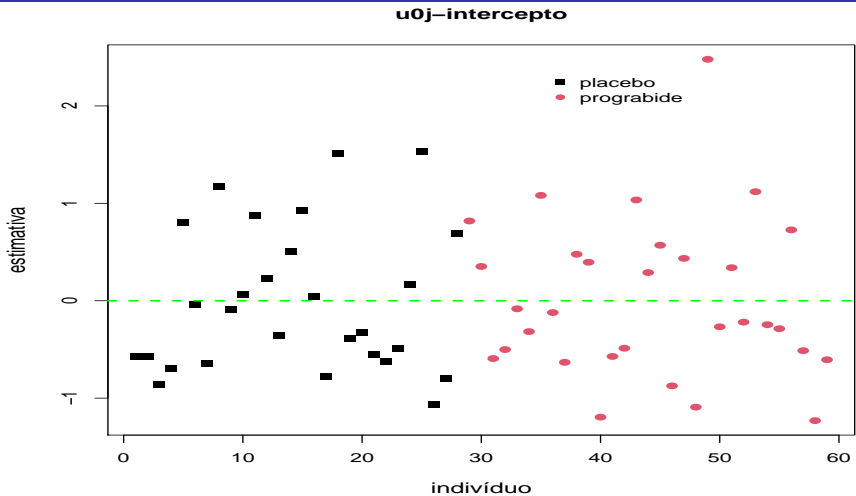
Gráfico de quantil-quantil normal



# Dispersão entre médias e variâncias condicionais MR

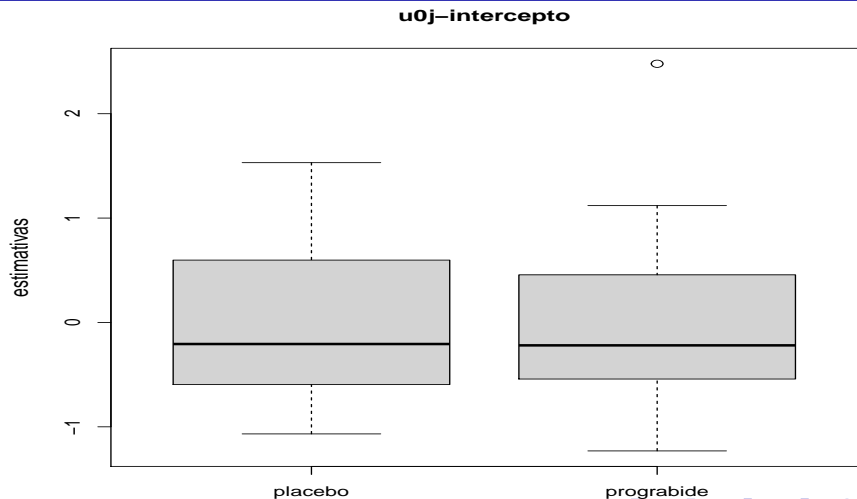


# Dispersão dos efeitos aleatórios por grupo MR

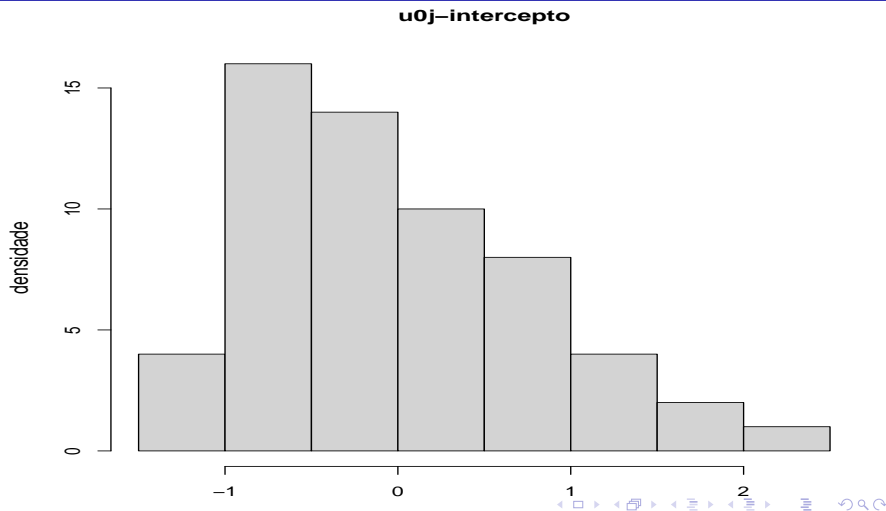




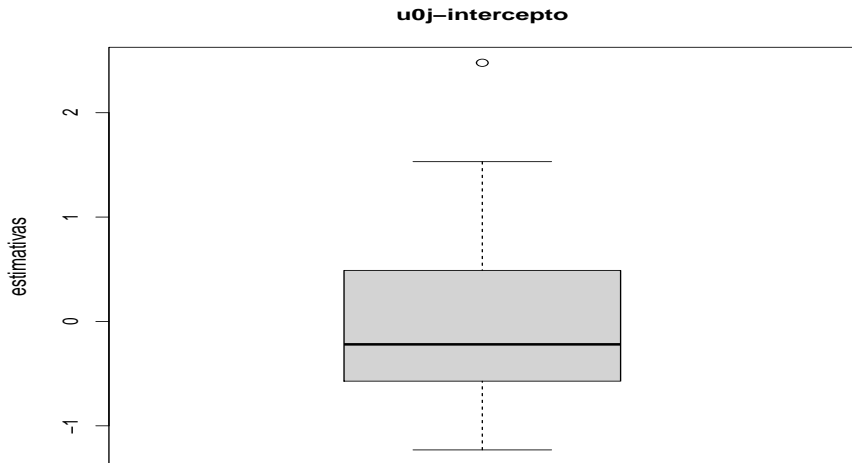
# Box plot dos efeitos aleatórios por grupo MR



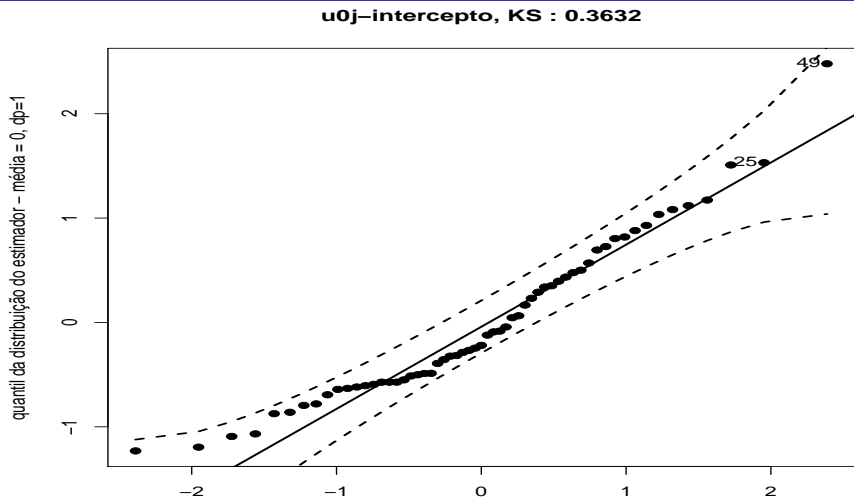
# Histograma dos efeitos aleatórios MR



# Box plot dos efeitos aleatórios MR



# QQplot dos efeitos aleatórios MR



# Estimativas MR

Parâmetro	Estimativa	EP	LIIC ; LSIC	Estat. z	p-valor
$\mu$	1,12	0,11	[0,90 ; 1,35]	9,92	<0,0001
$\delta_2$	-0,09	0,03	[-0,15 ; -0,04]	-3,13	0,0017

Há evidências de que a droga tem um efeito no decréscimo no número de ataques ( $\delta_2 = -0,09$ ) e que o número de ataques esperados, para os dois grupo, no primeiro período é de (aproximadamente) 3. Além disso, os efeitos aleatórios parecem ser significativos ( $\tilde{\psi} = 0,653$ ).

## Dados bdf pacote ([mvmRev](#))

- Dados considerados na Questão 3 da Prova I.
- Informações de 2.287 alunos de 131 escolas holandesas, matriculados no oitavo ano do respectivo sistema de ensino.
- As informações aqui consideradas são “escolas” (nível 2), “alunos” (nível 1), “denominação” (um fator indicativo se a escola é: pública (1), particular protestante (2), particular católica (3), ou particular não denominacional (4)), “QI” (escore num teste de QI, quanto maior, melhor a performance) e “aritPost” (escore num teste de aritmética, quanto maior, melhor a performance).
- O objetivo é estudar o comportamento do “aritPost” em função do QI e da “denominação”, ao longo das escolas.

# Análise e modelagem

- Análises descritivas podem ser vistas na Prova I.
- MLGH gama proposto:

$$Y_{jik} | \mathbf{u}_{jk} \stackrel{ind.}{\sim} \text{gama}(\mu_{jik}, \phi)$$

$$\log(\mu_{jik}) = \beta_{0jk} + \beta_{1jk}(QI - 11)$$

$$\beta_{0jk} = \gamma_{000} + \gamma_{00k} + u_{0jk}, \gamma_{001} = 0, (\text{nível 2, aluno})$$

$$\beta_{1jk} = \gamma_{10k} + u_{1jk}, (\text{nível 2, aluno})$$

$$j = 1, 2, \dots, 131 (\text{escola}); i = 1, 2, \dots, n_j (\text{aluno}),$$

$$k = 1, 2, 3, 4 (\text{denominação}),$$

$$\mathcal{E}(Y_{ij} | \mathbf{u}_{jk}) = \mu_{jik}, \mathcal{V}(Y_{ij} | \mathbf{u}_{jk}) = \frac{\mu_{jik}^2}{\phi}.$$

## Cont.

- $\xi_{jik} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ .

- $\mathbf{u}_{jk} = (u_{0jk}, u_{1jk})' \stackrel{iid}{\sim} N_2(0, \Psi)$ ,  $\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{00} & 0 \\ 0 & \psi_{11} \end{bmatrix}$ .

- $\xi_{ijk} \perp u_{0jk}$ ,  $\xi_{ijk} \perp u_{1jk}$ ,  $\forall i, j, k$ .

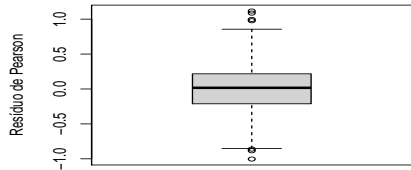
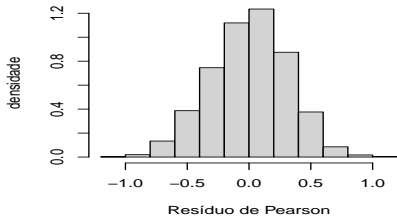
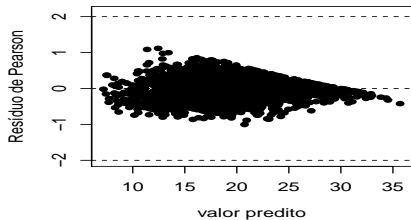
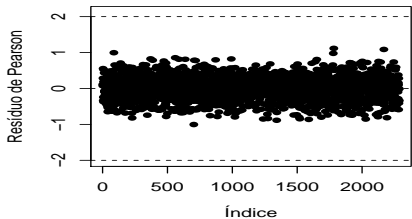
- Densidade condicional (resposta/efeitos aleatórios)

$$p(y_{jik} | \beta, \phi, \mathbf{u}_j) = \frac{1}{\Gamma(\phi)} \left( \frac{\phi y_{jik}}{\mu_{jik}} \right)^\phi e^{(-\phi y_{jik} / \mu_{jik})} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(y_{jik})$$

- Novamente, por motivo muito semelhantes, utilizou-se a função `glmmadmb` ao invés da `glmer`.
- Seguem-se alguns resultados do ajuste do modelo.
- Exercício: fornecer pelo menos uma interpretação para cada

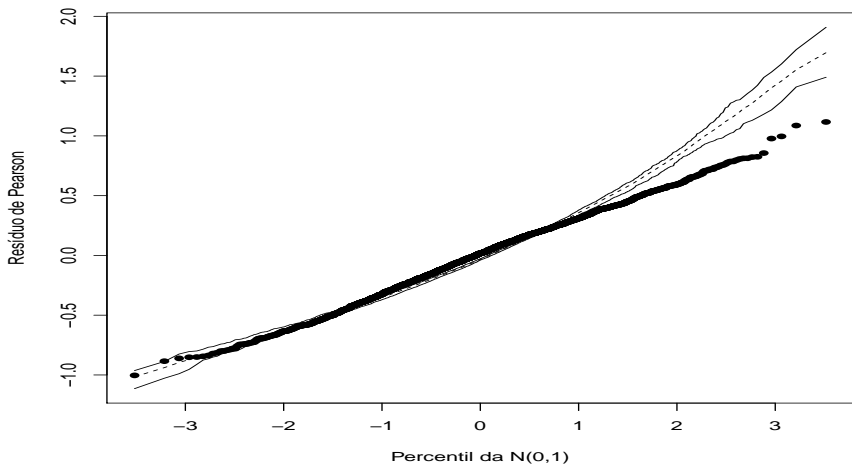


# Gráficos de diagnóstico (Resíduo de Pearson - RP)

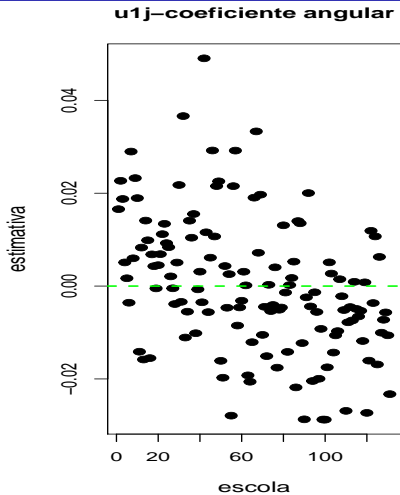
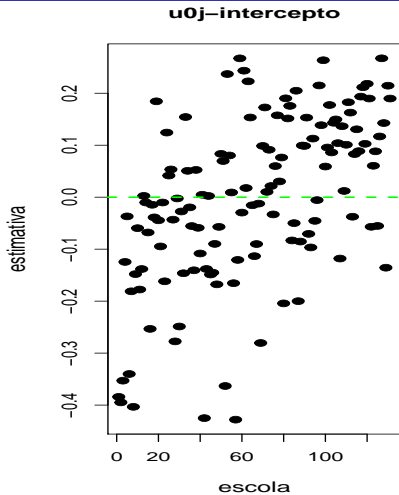


# QQplot com envelopes simulados (RP)

Gráfico de quantil-quantil normal

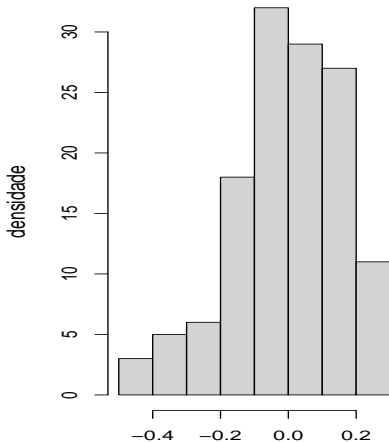


# Dispersão dos efeitos aleatórios

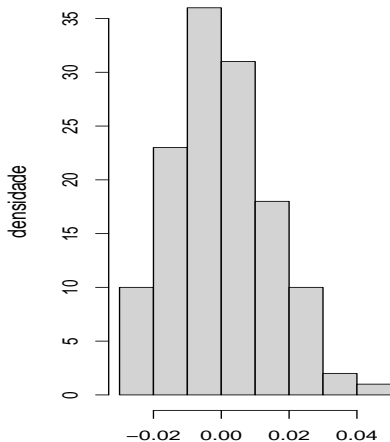


# Histograma dos efeitos aleatórios

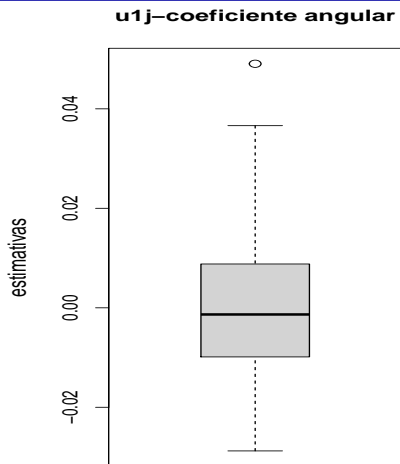
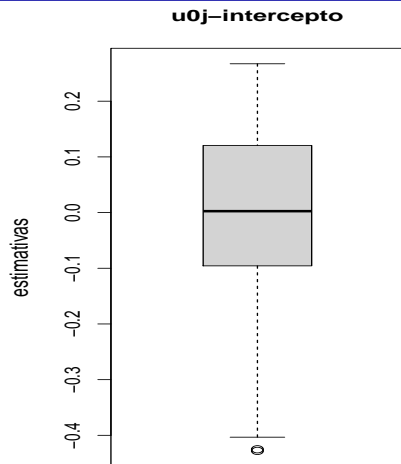
**u0j-intercepto**



**u1j-coeficiente angular**

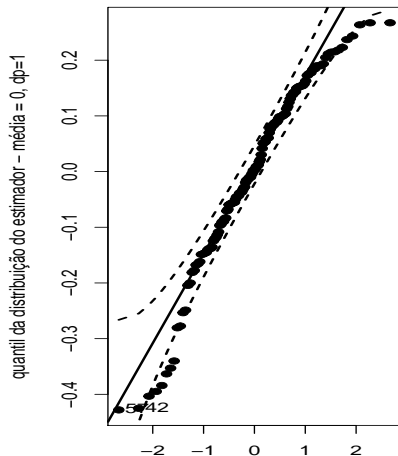


# Box plot dos efeitos aleatórios

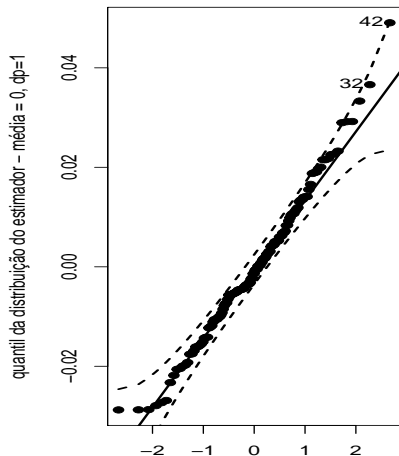


# QQplot dos efeitos aleatórios

**u<sub>0j</sub>-intercepto, KS : 0.5444**



**u<sub>1j</sub>-coef. angular, KS : 0.7669**



# Comentários

- Os gráficos de resíduos indicam um mal ajuste do modelo provavelmente, em parte ao menos, pela má especificação da função de variância e/ou da distribuição condicional da resposta.
- Os efeitos aleatórios apresentam não normalidade.
- Alternativas: (manter a distribuição dos efeitos aleatórios) usando algum modelo hierárquico da família Tweedie com suporte positivo ou modelos de quase verossimilhança com outra função de variância (inversamente proporcional a média, p.e.).

# Resultados

Parâmetro	Estimativa	EP	IC(95%)	Estat. z	p-valor
$\gamma_{000}$	2,936	0,024	[2,890 ; 2,983]	124,045	< 0,0001
$\gamma_{002}$	0,083	0,057	[-0,029 ; 0,195]	1,448	0,1475
$\gamma_{003}$	0,030	0,047	[-0,063 ; 0,122]	0,628	0,5297
$\gamma_{004}$	0,092	0,034	[ 0,025 ; 0,159]	2,678	0,0074
$\gamma_{101}$	0,091	0,007	[0,078 ; 0,104]	13,677	< 0,0001
$\gamma_{102}$	0,084	0,007	[0,071 ; 0,097]	12,826	< 0,0001
$\gamma_{103}$	0,080	0,007	[0,066 ; 0,094]	11,212	< 0,0001
$\gamma_{104}$	0,064	0,019	[ 0,027 ; 0,101]	3,404	< 0,0001

$\psi_{00}$	$\psi_{11}$	$\phi[IC(95\%)]$
0,031	0,001	11,87 [11,13;12,58]



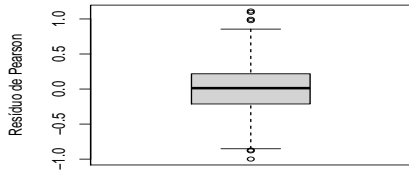
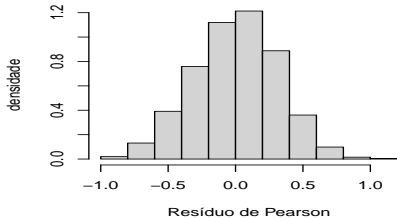
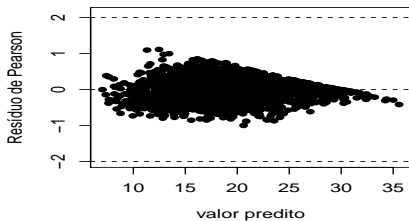
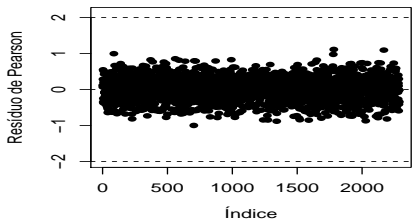
# Comentários

- Comentários: os valores esperados de aritpost, para alunos com  $QI = 11$ , parecem ser iguais, entre as escolas, públicas, particulares católicas e particulares protestantes.
- Ademais, o impacto do  $QI$  no valor esperado do aritpost é positivo e equivalente entre todas as escolas.
- Além disso, parece que, apenas o intercepto aleatório é significativo.

# Comentários

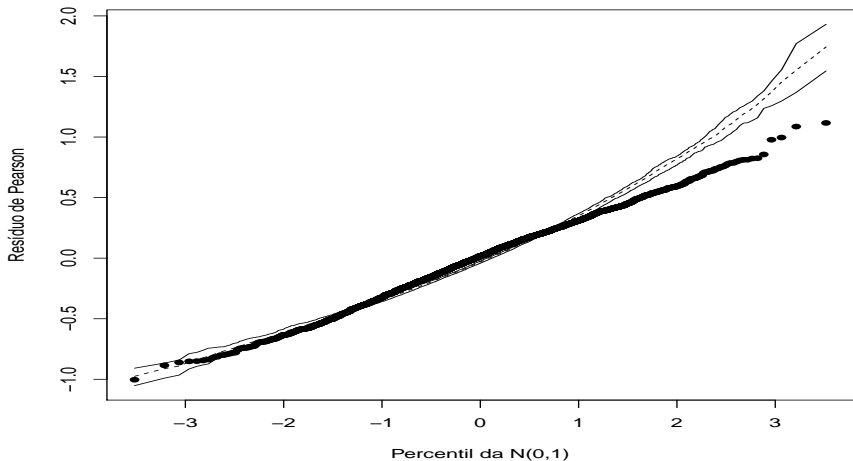
- O teste de Wald para testar  $H_0 : \gamma_{002} = \gamma_{003} = 0$  e  $\gamma_{101} = \gamma_{102} = \gamma_{103} = \gamma_{104}$  resultou em  $Q = 5,07(0,4079)$ . Assim, não se rejeita tal hipótese.
- Ajustou-se um modelo reduzido - MR (sob  $H_0$ ).

# Gráficos de diagnóstico MR (Resíduo de Pearson - RP)

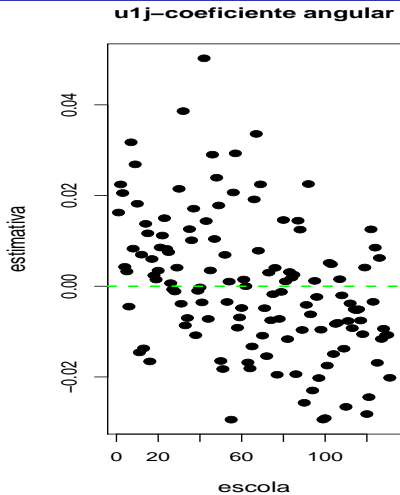
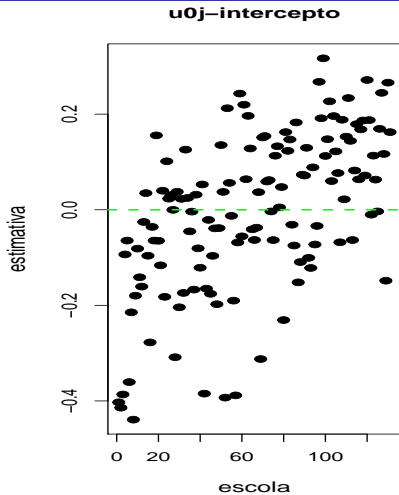


# QQplot com envelopes simulados MR (RP)

Gráfico de quantil–quantil normal

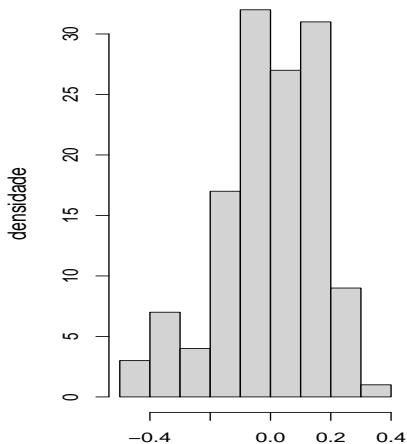


# Dispersão dos efeitos aleatórios MR

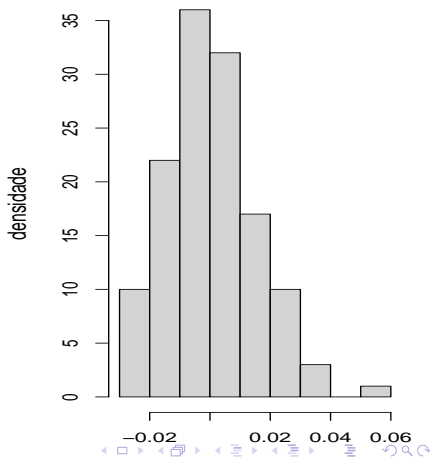


# Histograma dos efeitos aleatórios MR

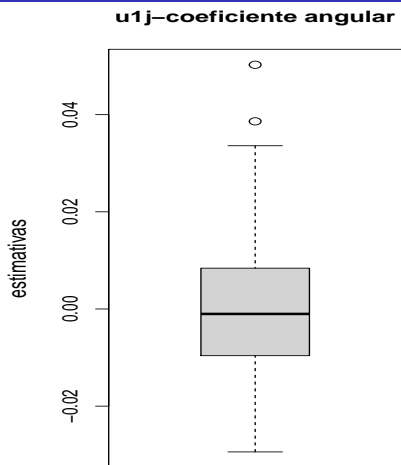
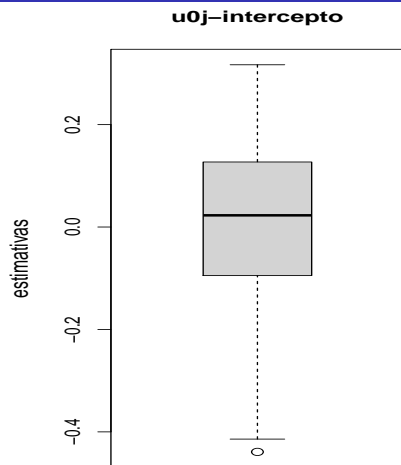
**u0j-intercepto**



**u1j-coeficiente angular**

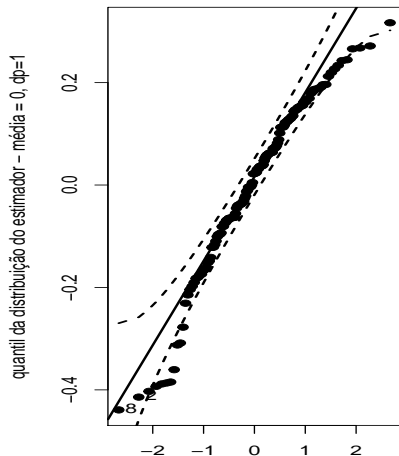


# Box plot dos efeitos aleatórios MR

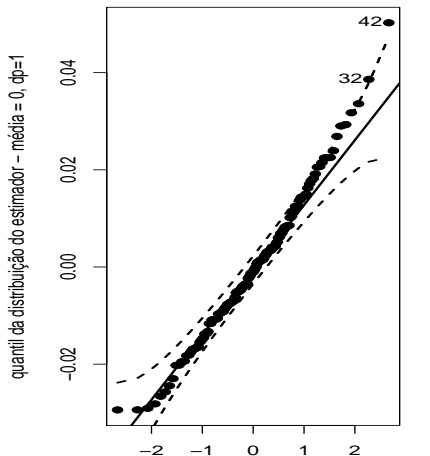


# QQplot dos efeitos aleatórios MR

**u<sub>0j</sub>-intercepto, KS : 0.5437**



**u<sub>1j</sub>-coef. angular, KS : 0.7496**





# Comentários

- Os gráficos de resíduos indicam um mal ajuste do modelo provavelmente, em parte ao menos, pela má especificação da função de variância e/ou da distribuição condicional da resposta.
- Os efeitos aleatórios apresentam não normalidade.
- Alternativas: (manter a distribuição dos efeitos aleatórios) usando algum modelo hierárquico da **família Tweedie** com suporte positivo ou modelos de **quase verossimilhança** com outra função de variância (inversamente proporcional a média, p.e.).

# Resultados

Parâmetro	Estimativa	EP	IC(95%)	Estat. z	p-valor
$\gamma_{000}$	2,967	0,042	[2,885 ; 3,047]	71,647	< 0,0001
$\gamma_{004}$	0,084	0,059	[-0,031 ; 0,1984]	1,431	0,1524
$\gamma_{10_{1234}}$	0,084	0,004	[0,0767 ; 0,092]	21,855	< 0,0001

$\psi_{00}$	$\psi_{11}$	$\phi[IC(95\%)]$
0,032	<0,001	11,86 [11,13;12,58]

Comentários: Com efeito, parece que o coeficiente angular não é significativo. Além disso, parece que todos os quatro tipos de escolas são equivalentes, incluso no valor do aritpost, sob um QI = 11.