Planejamento e Análise Estatística de Experimentos em Quadrados Latinos

Prof. Caio Azevedo

Contexto

- Como já foi dito, em qualquer experimento, fatores de perturbação, podem afetar os resultados.
- Fator de perturbação: fator que tem algum efeito na variável resposta mas no qual não se tem interesse.
- Fatores de perturbação podem ser desconhecidos e/ou não-controláveis.
- Em outros casos, podem ser conhecidos e/ou controláveis.

Contexto

- Não controláveis (ou desconhecidos): assume-se que não afetam a variável resposta.
- Controláveis (ou conhecidos): devem ser considerados no experimento (a não ser que não afetem a variável resposta).

Contexto

- **Observação: em experimentos em que existam restrições (fatores de perturbação): blocos (completos/incompletos, balanceados/não balanceados, quadrados latinos, quadrados greco-latinos** , pode-se ter um ou mais fatores de interesse.
- Vimos experimentos em blocos (em que os blocos representam um fator de perturbação).
- Podemos ter mais de um fator de perturbação (restrição).

Cont.

- Veremos um tipo experimento no qual existem dois fatores de perturbação. O objetivo continua sendo o de controlar o efeito de fatores (que não são de interesse principal) na variável resposta.
- Tais experimentos são chamados de experimentos em quadrados latinos.

Exemplo 9: Aroma de alimentos

- Um pesquisador está estudando o efeito de 4 tratamentos (A, B, C e D), sobre o aroma (escala hedônica de 7 pontos) de um determinado tipo de legume.
- Quanto maior o valor atribuído, melhor a percepção que o julgador tem de determinado produto.
- Foram utilizados 4 julgadores, provavelmente existem diferenças (exemplo: experiência, capacidade) entre eles.

Exemplo 9: Aroma de alimentos

- Além disso, foram utilizadas 4 ordens de atribuição dos tratamentos aos julgadores geradas pela casualização do delineamento.
- Dois fatores de perturbação ("nuisance"): julgadores e ordens.
- Cada tratamento foi testado uma única vez por cada julgador e para cada ordem. A tabela a seguir mostra o esquema geral deste delineamento.

Exemplo 9: Aroma de alimentos (cont.)

Julgador	Ordem			
	1	2	3	4
1	D (7)	A (6)	C (5)	B (7)
2	A (6)	C (7)	B (7)	D (7)
3	C (7)	B (7)	D (6)	A (7)
4	B (7)	D (7)	A (6)	C (6)

Exemplo 9: Aroma de alimentos (cont.)

- Note que o experimento, geometricamente, está em disposto em forma de quadrado.
- Note que cada tratamento está representado por uma letra do alfabeto latino (A, B, C, D).
- O nome **quadrado latino** vem das duas características acima.
- Note que o

  número de tratamentos = número de julgadores = número de ordens.

PQL: características

- Existem muitos estruturas de quadrados latinos para um dado número de tratamentos (a), veja páginas 144 e 145, do livro do Montgomery (2022).
- Exemplos com a $=$ 3.

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & C & A \\ A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}.$$

PQL: características (cont.)

- Exemplos $a = 4$.

$$\begin{bmatrix} D & A & C & B \\ A & C & B & D \\ C & B & D & A \\ B & D & A & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & D & A & C \\ C & B & D & A \\ D & A & C & B \\ A & C & B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \\ C & D & A & B \\ D & A & B & C \end{bmatrix}.$$

- **Restrição fundamental**: Independentemente do valor de a, cada letra (tratamento) deverá aparecer somente uma única vez em cada linha e em cada coluna (balanceamento).

PQL: modelo (casela de referência)

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \lambda_k + \xi_{ijk}$$

$$(\text{Fator}), i = 1, 2, 3, ...a; (\text{Linha}), j = 1, 2, 3, ..., a; (\text{Coluna}), k = 1, 2, 3, ..., a$$

- Erros $\xi_{ijk} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, $\mu, \alpha_i, \tau_j, \lambda_k, \forall i, j, k$ não aleatórios.
- Restrições : $\alpha_1 = \tau_1 = \lambda_1 = 0$.
- Neste caso temos um experimento balanceado (o número de unidades experimentais por cada combinação tratamento x linha x coluna é o mesmo.
- Tem-se um total de $n = a \times a = a^2$ observações (linhas x colunas).

PQL: modelo (casela de referência) cont.

- Note que, somente para algumas combinações i, j, k, teremos observações.
- De uma outra forma, bastam dois dos três índices $i, j, k,$, para representar uma determinada observação. No problema em questão, se, por exemplo, $j = 2$ e $k = 3$, então $i = 2$ (tratamento B), então $y_{223} = 7$.

PQL: modelo (casela de referência) cont.

- Note que, somente para algumas combinações i, j, k, teremos observações.
- De uma outra forma, bastam dois dos três índices $i, j, k,$, para representar uma determinada observação. No problema em questão, se, por exemplo, $j = 2$ e $k = 3$, então $i = 2$ (tratamento B), então $y_{223} = 7$.

Somas de quadrados

- Decomposição da soma de quadrados total:

$$SQT = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{a} Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{...}^2}{n} = SQF + SQ_{Linhas} + SQ_{Colunas} + SQR$$

$$\begin{aligned}
SQF &= \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a} Y_{i..}^2 - \frac{Y_{...}^2}{n} \\
SQ_{Linhas} &= \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{a} Y_{.j.}^2 - \frac{Y_{...}^2}{n} \\
SQ_{Colunas} &= \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a} Y_{..k}^2 - \frac{Y_{...}^2}{n} \\
SQR &= SQT - SQF - SQ_{Linhas} - SQ_{Colunas}
\end{aligned}$$

Somas de quadrados

- (cont.) em que:

$$
\begin{aligned}
Y_{\dots} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{a} Y_{ijk},\\
Y_{i..} &= \sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{a} Y_{ijk},\\
Y_{j.} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{a} Y_{ijk},\\
Y_{..k} &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{a} Y_{ijk}.
\end{aligned}
$$

Tabela de análise de variância

FV	SQ	GL	QM	Estatística F	pvalor
Fator	SQF	a-1	$QMF = \frac{SQF}{(a-1)}$	$F = \frac{QMF}{QMR}$	$\min(F(f\|H_0), S(f\|H_0))$
Linhas	SQ_{Linhas}	a-1	$QM_{Linhas} = \frac{SQ_{Linhas}}{(a-1)}$	$F_{Linhas} = \frac{QM_{Linhas}}{QMR}$	$\min(F(f_{Linhas}\|H_0), S(f_{Linhas}\|H_0))$
Colunas	$SQ_{Colunas}$	a-1	$QM_{Colunas} = \frac{SQ_{Colunas}}{(a-1)}$	$F_{Colunas} = \frac{QM_{Colunas}}{QMR}$	$\min(F(f_{Colunas}\|H_0)$ $S(f_{Colunas}\|H_0))$
Resíduo	SQR	(a-2)(a-1)	$QMR = \frac{SQR}{[(a-2)(a-1)]}$		
Total	SQT	$a^2 - 1$			

FV: fonte de variação, SQ: soma de quadrados, Gl: graus de liberdade, QM: quadrado médio. $F(x|H_0), S(x|H_0)$ fda e fds no ponto x sob H_0, respectivamente. Pode-se ou não avaliar as magnitudes de F_{Linhas} e $F_{Colunas}$. Espera-se que os efeitos desses fatores sejam significativos.

Esperanças dos Quadrados Médios

- Pesquisar/calcular as fórmulas.
- Pesquisa como fica o cálculo do poder do teste.

Análise descritiva: por tratamento

Tratamento	média	DP	Var	CV(%)	Mínimo	Máximo
A	6,25	0,50	0,25	8,00	6,00	7,00
B	7,00	0,00	0,00	0,00	7,00	7,00
C	6,25	0,96	0,92	15,32	5,00	7,00
D	6,75	0,50	0,25	7,41	6,00	7,00

Análise descritiva: por julgador

Julgador	média	DP	Var	CV(%)	Mínimo	Máximo
1	6,25	0,96	0,92	15,32	5,00	7,00
2	6,75	0,50	0,25	7,41	6,00	7,00
3	6,75	0,50	0,25	7,41	6,00	7,00
4	6,50	0,58	0,33	8,88	6,00	7,00

Análise descritiva: por ordem

Ordem	média	DP	Var	CV(%)	Mínimo	Máximo
1	6,75	0,50	0,25	7,41	6,00	7,00
2	6,75	0,50	0,25	7,41	6,00	7,00
3	6,00	0,82	0,67	13,61	5,00	7,00
4	6,75	0,50	0,25	7,41	6,00	7,00

Gráfico de perfis (médios): por tratamento

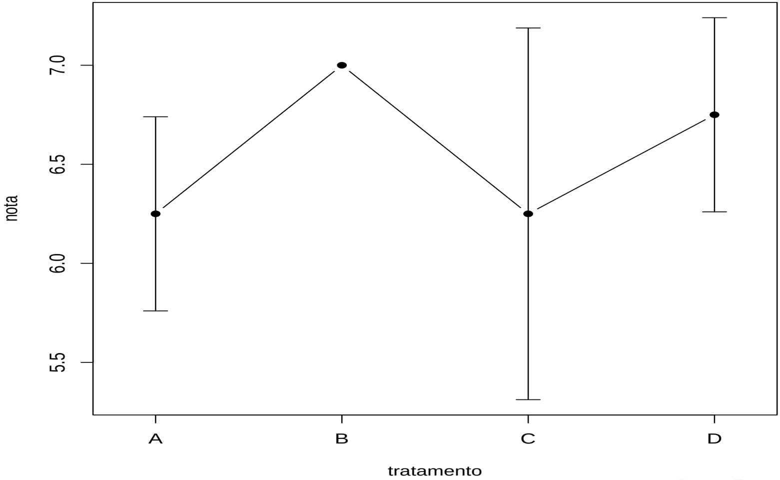


Gráfico de perfis (médios): por julgador

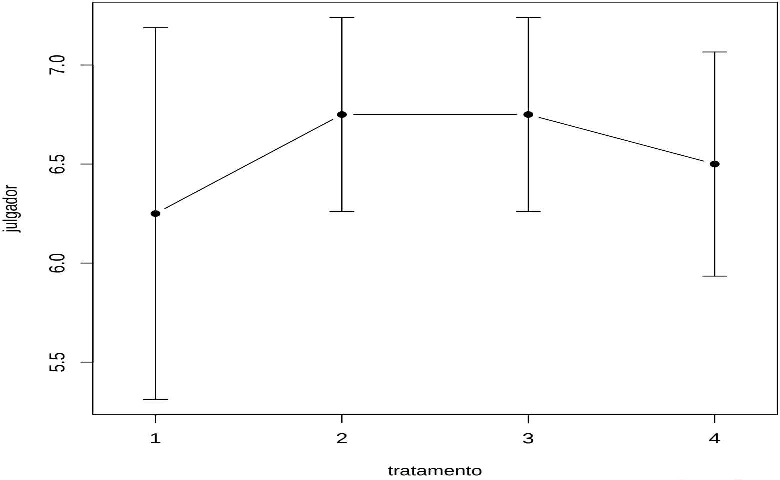
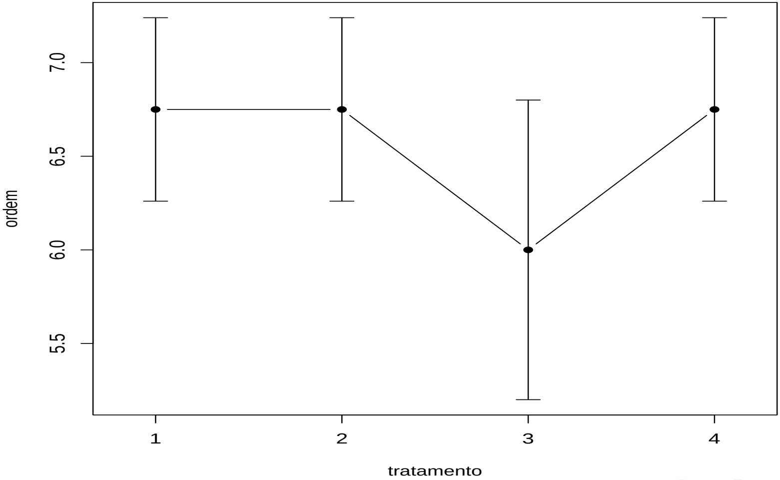


Gráfico de perfis (médios): por ordem



Comentários

- Aparentemente, não há efeito (ou há um efeito muito módico) de tratamento, julgador e ordem.

Voltando ao exemplo: modelo (casela de referência)

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \lambda_k + \xi_{ijk}$$

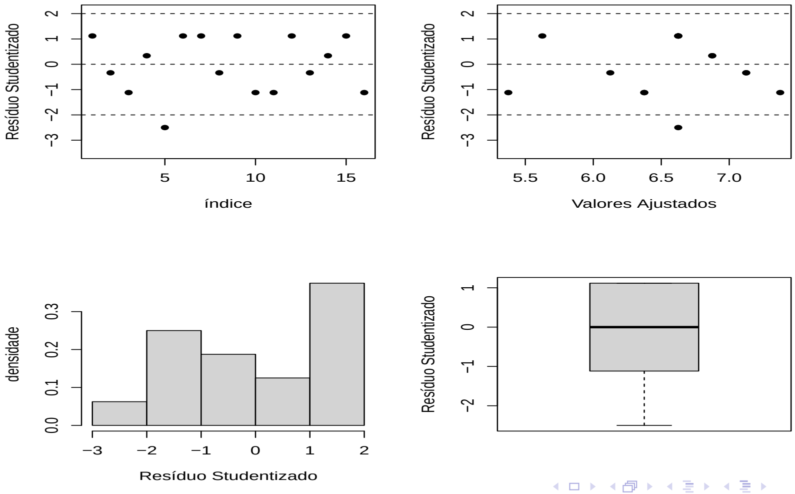
(Fator), $i = 1, 2, 3, 4\,(A, B, C, D)$; (Julgador), $j = 1, 2, 3, 4$; (Ordem), $k = 1, 2, 3, 4$

- Erros $\xi_{ijk} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, $\mu, \alpha_i, \tau_j, \lambda_k, \forall i, j, k$ não aleatórios.
- Restrições : $\alpha_1 = \tau_1 = \lambda_1 = 0$.
- Neste caso temos um experimento balanceado (o número de unidades experimentais por cada combinação tratamento $\times$ linha $\times$ coluna é o mesmo.

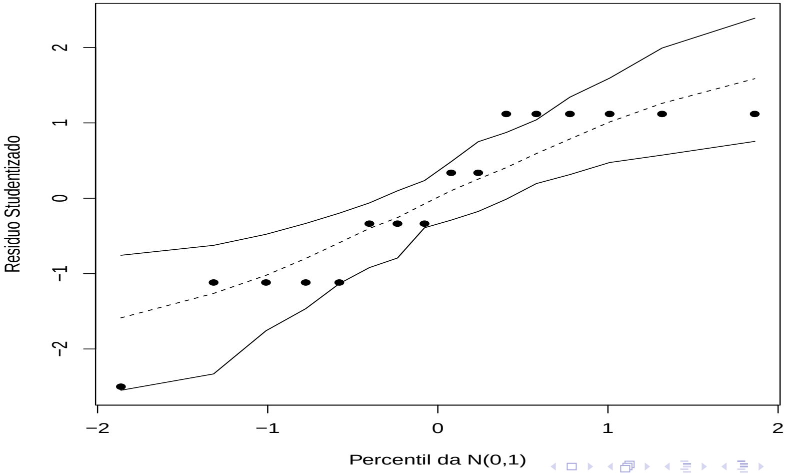
Voltando ao exemplo: modelo (casela de referência)

- Tem-se um total de $n = 4 \times 4 = 16$ observações (linhas x colunas).
- Note que, somente para algumas combinações i, j, k, teremos observações. Por exemplo, i=1, j=1, k=2.

Análise de resíduos (modelo inicial)



QQ plot para os resíduos (modelo inicial)



Cmentários

- O modelo não se ajustou bem aos dados. Há indícios de não normalidade.
- Como a resposta é um número entre 0 e 7, a distribuição binomial poderia ser uma alternativa interessante.

Tabela ANOVA

FV	SQ	df	QM	Estatística F	p-valor
Tratamento	3	1,69	0,56	1,80	0,2473
Julgador (linhas)	3	0,69	0,23	0,73	0,5690
Ordem (coluna)	3	1,69	0,56	1,80	0,2473
Resíduo	6	1,88	0,31		
Total	15	5,94			

Ausência de efeitos de julgador e ordem, e de efeito de tratamento.

Estimativas dos parâmetros do modelo

Parâmetro	Estimativa	EP	IC(95%)	Estat. t	pvalor
μ	6,12	0,44	[5,26 ; 6,99]	13,86	$<$0,0001
α_2	0,75	0,40	[-0,02 ; 1,52]	1,90	0,1066
α_3	-0,00	0,40	[-0,77 ; 0,77]	-0,00	$>$0,9999
α_4	0,50	0,40	[-0,27 ; 1,27]	1,26	0,2528
τ_2	0,50	0,40	[-0,27 ; 1,27]	1,26	0,2528
τ_3	0,50	0,40	[-0,27 ; 1,27]	1,26	0,2528
τ_4	0,25	0,40	[-0,52 ; 1,02]	0,63	0,5504
λ_2	0,00	0,40	[-0,77 ; 0,77]	0,00	$>$0,9999
λ_3	-0,75	0,40	[-1,52 ; 0,02]	-1,90	0,1066
λ_3	-0,00	0,40	[-0,77 ; 0,77]	-0,00	$>$0,9999

Modelo reduzido (casela de referência)

$$Y_{ijk} = \mu + \xi_{ijk}$$

(Fator), $i = 1, 2, 3, 4$; (Julgador), $j = 1, 2, 3, 4$; (Ordem), $k = 1, 2, 3, 4$

- Erros $\xi_{ijk} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, $\mu, \alpha_i, \tau_j, \lambda_k, \forall i, j, k$ não aleatórios.
- Tem-se, literalmente, um modelo sem a presença de nenhum fator.
- À rigor, pode-se simplesmente utilizar a inferência usual para a média de uma distribuição normal (veja aqui)

Estimativas final da média comum à todas as observações

Grupo	Estimativa	EP	IC(95%)
Tratamentos (A,B,C,D)	6,56	0,16	[6,23 ; 6,90]

Exemplo 10: propulsor de foguetes

- Um pesquisador está interessado em estudar os efeitos de diferentes formulações de propulsores de foguetes usados em sistema de fuga da tripulação (assento ejetor, p.e.) em termos "velocidade de queima" (provavelmente o quão rápido o sistema ejeta os tripulantes).
- Cada formulação é misturada a partir de um lote de matéria prima que é suficiente apenas para testar 5 formulações.
- Além disso, as formulações são preparadas por diferentes operadores.
- Pode haver variabilidade tanto entre operadores quanto porções da matéria prima.

Exemplo 10: Propulsor de foguetes (cont.)

Porção de Matéria Prima	Operador				
	1	2	3	4	5
1	A (24)	B (20)	C (19)	D (24)	E (24)
2	B (17)	C (24)	D (30)	E (27)	A (36)
3	C (18)	D (38)	E (26)	A (27)	B (21)
4	D (26)	E (31)	A (26)	B (23)	C (22)
5	E (22)	A (30)	B (20)	C (29)	D (31)

Análise descritiva: por tratamento

Tratamento	média	DP	Var	CV(%)	Mínimo	Máximo
A	28,60	4,67	21,80	16,33	24,00	36,00
B	20,20	2,17	4,70	10,73	17,00	23,00
C	22,40	4,39	19,30	19,61	18,00	29,00
D	29,80	5,40	29,20	18,13	24,00	38,00
E	26,00	3,39	11,50	13,04	22,00	31,00

Análise descritiva: por porção de matéria prima

Matéria-prima	média	DP	Var	CV(%)	Mínimo	Máximo
1	22,20	2,49	6,20	11,22	19,00	24,00
2	26,80	7,05	49,70	26,31	17,00	36,00
3	26,00	7,65	58,50	29,42	18,00	38,00
4	25,60	3,51	12,30	13,70	22,00	31,00
5	26,40	5,03	25,30	19,05	20,00	31,00

Análise descritiva: por operador

Operador	média	DP	Var	CV(%)	Mínimo	Máximo
1	21,40	3,85	14,80	17,98	17,00	26,00
2	28,60	6,91	47,80	24,17	20,00	38,00
3	24,20	4,60	21,20	19,03	19,00	30,00
4	26,00	2,45	6,00	9,42	23,00	29,00
5	26,80	6,46	41,70	24,10	21,00	36,00

Gráfico de perfis (médios): por tratamento

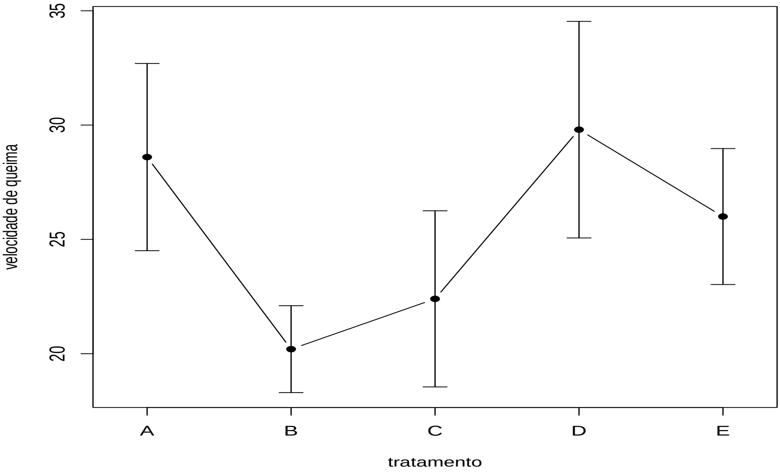


Gráfico de perfis (médios): por porção de matéria-prima

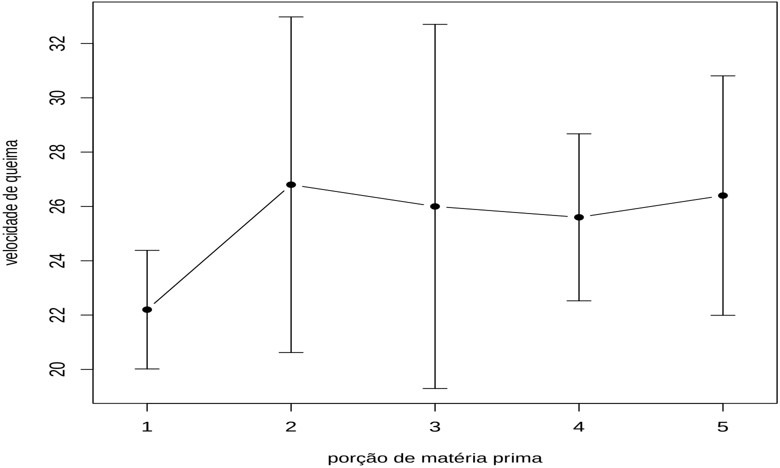
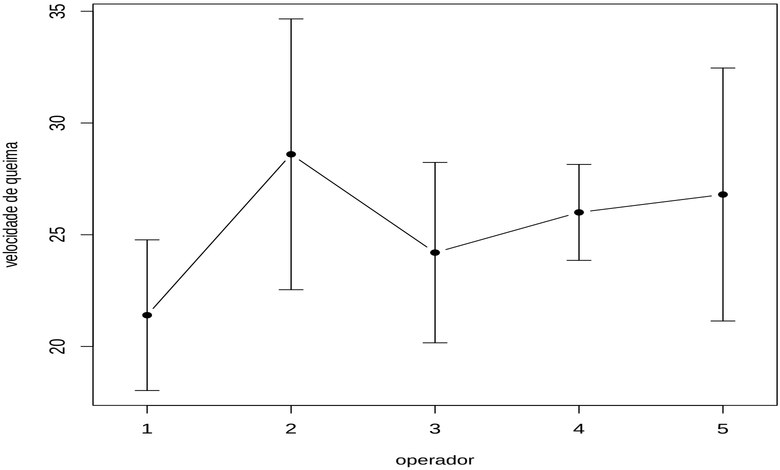


Gráfico de perfis (médios): por operador



Modelo (casela de referência)

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \lambda_k + \xi_{ijk}$$

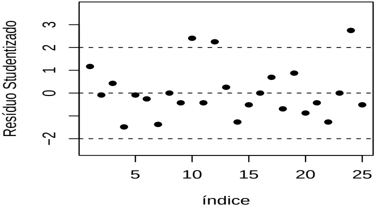
(Fator), $i = 1, 2, 3, 4, 5(A, B, C, D, E)$; (Porção de matéria prima), $j = 1, 2, 3, 4, 5$; (Operador), $k = 1, 2, 3, 4, 5$

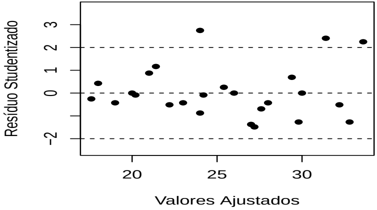
- Erros $\xi_{ijk} \overset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$, $\mu, \alpha_i, \tau_j, \lambda_k, \forall i, j, k$ não aleatórios.
- Restrições : $\alpha_1 = \tau_1 = \lambda_1 = 0$.
- Neste caso temos um experimento balanceado (o número de unidades experimentais por cada combinação tratamento $\times$ linha $\times$ coluna é o mesmo.

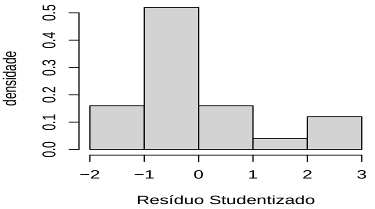
Modelo (casela de referência)

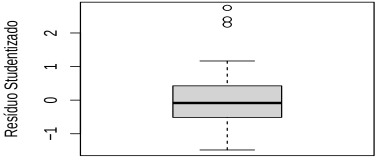
- Tem-se um total de $n = 5 \times 5 = 25$ observações (linhas x colunas).
- Note que, somente para algumas combinações i, j, k, teremos observações. Por exemplo, $i = 1, j = 1, k = 1$.

Análise de resíduos

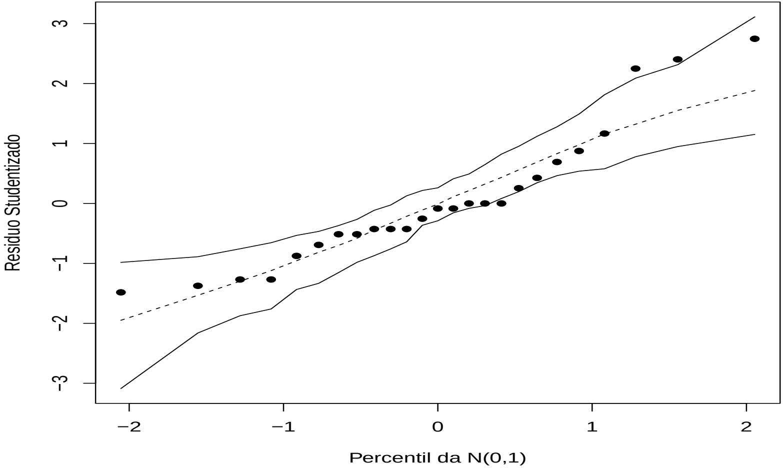








Análise de resíduos



Comentários

- Parece que as suposições do modelo não são válidas para o conjunto de dados em questão (embora o ajuste tenha melhorado em relação à situação anterior).
- Ausência de homocedasticiade e normalidade.
- Uma alternativa: modelos de regressão com distribuição assimétrica/caudas pesadas para a variável resposta, que permita variâncias diferentes: normal e t assimétricas.
- Vamos continuar com o atual modelo por questões pedagógicas.

Tabela ANOVA

FV	SQ	df	QM	Estatística F	p-valor
Tratamento	330,00	4	82,50	7,73	0,0025
Matéria-prima (linha)	68,00	4	17,00	1,59	0,2391
Operador (coluna)	150,00	4	37,50	3,52	0,0404
Resíduo	128,00	12	10,67		
Tota	676,00	24			

Ausência de efeito de matéria-prima. Existência de efeitos de operador e tratamento. Interesse principal: investigar as diferenças entre as médias dos tratamentos ($\alpha = 0,05$).

Estimativas dos parâmetros do modelo

Parâmetro	Estimativa	EP	IC(95%)	Estat. t	pvalor
μ	21,40	2,36	[16,78 ; 26,02]	9,09	$<$0,0001
α_2	-8,40	2,07	[-12,45 ; -4,35]	-4,07	0,0016
α_3	-6,20	2,07	[-10,25 ; -2,15]	-3,00	0,0110
α_4	1,20	2,07	[-2,85 ; 5,25]	0,58	0,5720
α_5	-2,60	2,07	[-6,65 ; 1,45]	-1,26	0,2321
τ_2	4,60	2,07	[0,55 ; 8,65]	2,23	0,0459
τ_3	3,80	2,07	[-0,25 ; 7,85]	1,84	0,0907
τ_4	3,40	2,07	[-0,65 ; 7,45]	1,65	0,1257
τ_5	4,20	2,07	[0,15 ; 8,25]	2,03	0,0647

Estimativas dos parâmetros do modelo (cont.)

Parâmetro	Estimativa	EP	IC(95%)	Estat. t	pvalor
λ_2	7,20	2,07	[3,15 ; 11,25]	3,49	0,0045
λ_3	2,80	2,07	[-1,25 ; 6,85]	1,36	0,2002
λ_4	4,60	2,07	[0,55 ; 8,65]	2,23	0,0459
λ_5	5,40	2,07	[1,35 ; 9,45]	2,61	0,0226

Comentários

- Uma possível abordagem seria ajustar um modelo considerando apenas os tratamentos e os operadores.
- Note que, a rigor, tal modelo corresponderia à um planejamento em blocos completos casualizados com 5 observações (tratamento x bloco). Neste caso, bloco = operador.
- Voltar ao pesquisador e conversar com ele a respeito.
- Exercício: ajustar dois modelos (considerando operador como bloco): um sem interação tratamento x bloco outro com interação.
- Lembre-se: o objetivo continua o mesmo, comparar as médias dos tratamentos.

Médias de cada tratamento

- De modo semelhante ao planejamento em blocos, temos que a média de cada tratamento é dada por

$$\overline{\mu}_{i..} = \frac{1}{a^2}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{a}\mu_{ijk} = \mu + \alpha_i + \overline{\tau} + \overline{\lambda},$$

  em que $\overline{\tau} = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{a}\tau_j; \overline{\lambda} = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a}\lambda_k$.

- Hipóteses de interesse: $H_0 : \mu_{i..} = \mu_{i'..}$ vs $H_1 : \mu_{i..} \neq \mu_{i'..}, \forall i < i'$.

Médias de cada tratamento

- Vamos comparar duas abordagens, primeiramente, fazendo todas as comparações dois a dois e, caso necessário, fazendo comparações adicionais.
- Na segunda tentaremos testar o menor número necessário de hipóteses.

Comparação entre as médias dos tratamentos

- Hipóteses:
  - (1): $H_0 : \overline{\mu}_{1..} = \overline{\mu}_{2..}$ vs $\overline{\mu}_{1..} \neq \overline{\mu}_{2..}$
  - (2): $H_0 : \overline{\mu}_{1..} = \overline{\mu}_{3..}$ vs $\overline{\mu}_{1..} \neq \overline{\mu}_{3..}$
  - (3): $H_0 : \overline{\mu}_{1..} = \overline{\mu}_{4..}$ vs $\overline{\mu}_{1..} \neq \overline{\mu}_{4..}$
  - (4): $H_0 : \overline{\mu}_{1..} = \overline{\mu}_{5..}$ vs $\overline{\mu}_{1..} \neq \overline{\mu}_{5..}$
  - (5): $H_0 : \overline{\mu}_{2..} = \overline{\mu}_{3..}$ vs $\overline{\mu}_{2..} \neq \overline{\mu}_{3..}$
  - (6): $H_0 : \overline{\mu}_{2..} = \overline{\mu}_{4..}$ vs $\overline{\mu}_{2..} \neq \overline{\mu}_{4..}$
  - (7): $H_0 : \overline{\mu}_{2..} = \overline{\mu}_{5..}$ vs $\overline{\mu}_{2..} \neq \overline{\mu}_{5..}$
  - (8): $H_0 : \overline{\mu}_{3..} = \overline{\mu}_{4..}$ vs $\overline{\mu}_{3..} \neq \overline{\mu}_{4..}$
  - (9): $H_0 : \overline{\mu}_{3..} = \overline{\mu}_{5..}$ vs $\overline{\mu}_{3..} \neq \overline{\mu}_{5..}$
  - (10): $H_0 : \overline{\mu}_{4..} = \overline{\mu}_{5..}$ vs $\overline{\mu}_{4..} \neq \overline{\mu}_{5..}$

Vetores C

- Lembrando que:

$$\beta' = \begin{bmatrix} \mu & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 & \tau_5 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \end{bmatrix}$$

- Temos que
  - (1): $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - (2): $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - (3): $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - (4): $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - (5): $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Vetores C

- (cont.)
  - (6): $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - (7): $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - (8): $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - (9): $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - (10): $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Resultados

- Vamos utilizar $\alpha^* = \alpha/10 = 0,05/10 = 0,005$
- Hipóteses :
  - (1): (AB) ; f = 16,54; pvalor = 0,0016 (*).
  - (2): (AC) ; f = 9,01; pvalor = 0,0011 (*).
  - (3): (AD) ; f = 0,34; pvalor = 0,5720.
  - (4): (AE) ; f = 1,58; pvalor = 0,2321.
  - (5): (BC) ; f = 1,13; pvalor = 0,3078.

Resultados

- (cont.) Hipóteses :
  - (6): (BD) ; $f = 21{,}60$; pvalor $= 0{,}0006$ (*).
  - (7): (BE) ; $f = 7{,}88$; pvalor $= 0{,}0158$.
  - (8): (CD) ; $f = 12{,}83$; pvalor $= 0{,}0038$ (*).
  - (9): (CE) ; $f = 3{,}04$; pvalor $= 0{,}1069$.
  - (10): (DE) ; $f = 3{,}38$; pvalor $= 0{,}0907$.

Comentários

- Os resultados indicam a possível existência de dois grupos de médias (A,D,E) e (B,C).
- Vamos testar a seguinte hipótese:

$$(11): \; H_0: \frac{\overline{\mu}_{1..} + \overline{\mu}_{4..} + \overline{\mu}_{5..}}{3} = \frac{\overline{\mu}_{2..} + \overline{\mu}_{3..}}{2}.$$

- A hipótese acima corresponde a testar

$$(11): \; H_0: 3\alpha_2 + 3\alpha_3 - 2\alpha_4 - 2\alpha_5 = 0.$$

Comentários

- Neste caso,

$$\boldsymbol{C} = \left[\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & 3 & 3 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

- Resultados: f = 26,27; pvalor = 0,0003.
- Estimar as médias comuns ou ajustar um modelo reduzido.
- Exercício: ajustar o modelo reduzido.

Comentários

- A segunda abordagem consiste em começar testando as hipóteses (11).
- Como nós a rejeitamos, um passo seguinte consiste em testar:

$$
\begin{aligned}
(12): &\qquad H_0 : \overline{\mu}_{1..} = \overline{\mu}_{4..} = \overline{\mu}_{5..}\\
(13): &\qquad H_0 : \overline{\mu}_{2..} = \overline{\mu}_{3..}
\end{aligned}
$$

Comentários

- Que equivalem a testar

$$
\begin{aligned}
(12):& \qquad H_0 : \alpha_4 = \alpha_5 = 0 \\
(13);& \qquad H_0 : \alpha_2 = \alpha_3
\end{aligned}
$$

- As matrizes $\boldsymbol{C}$ são, respectivamente, dadas por:

$$
(12): \qquad \boldsymbol{C} = \left[\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],
$$

$$
(13): \qquad \boldsymbol{C} = \left[\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].
$$

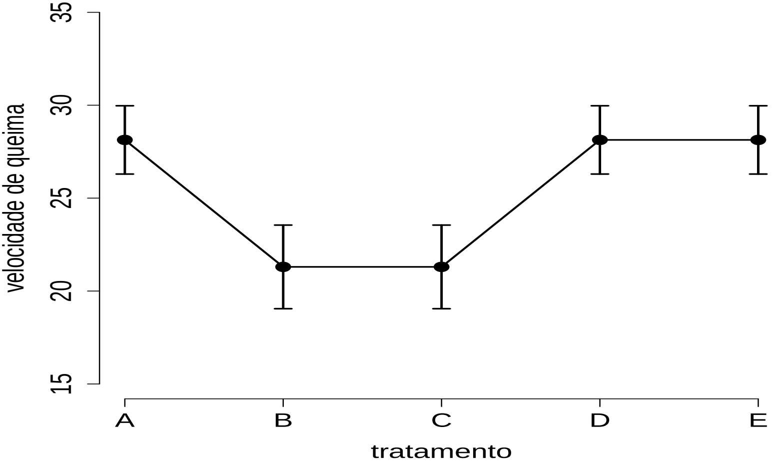
Comentários

- Resultados
  - (12): $f = 1{,}77$; p-valor $= 0{,}2122$.
  - (13): $f = 1{,}13$; p-valor $= 0{,}3078$.
- Os quais levam à mesma conclusão anterior.

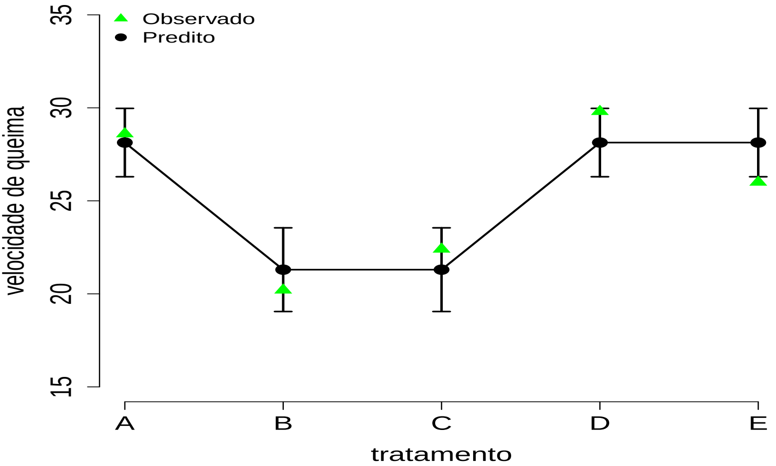
Estimativas finais das médias

Grupo	Estimativa	EP	IC(95%)
Grupo 1 (A,D,E)	28,13	0,84	[26,30; 29,97]
Grupo 2 (B,C)	21,30	1,03	[19,04; 23,55]

Gráfico de perfis médios ajustados via modelo reduzido



Perfis médios ajustados e observados via modelo reduzido



Comentários

- A predição das médias foi bastante razoável, sob o modelo reduzido.
- Pesquisar sobre experimentos em quadrados latinos com replicação.
- Pesquisar sobre experimentos em quadrados greco-latinos.
- Capítulo 4 do livro do Montgomery (2022).