

Planejamento e Análise Estatística de Experimentos em blocos completos

Prof. Caio Azevedo

Contexto

- Em qualquer experimento, fatores de perturbação, podem afetar os resultados.
- Fator de perturbação: fator que tem algum efeito na variável resposta mas no qual não se tem interesse.
- Em geral, fatores de perturbação são desconhecidos e não-controláveis.

Contexto

- Em outros casos, são conhecidos e controláveis.
- Não controláveis (ou desconhecidos): assume-se que não afetam a variável resposta.
- Controláveis (ou conhecidos): devem ser considerados no experimento (a não ser que não afetem a variável resposta).

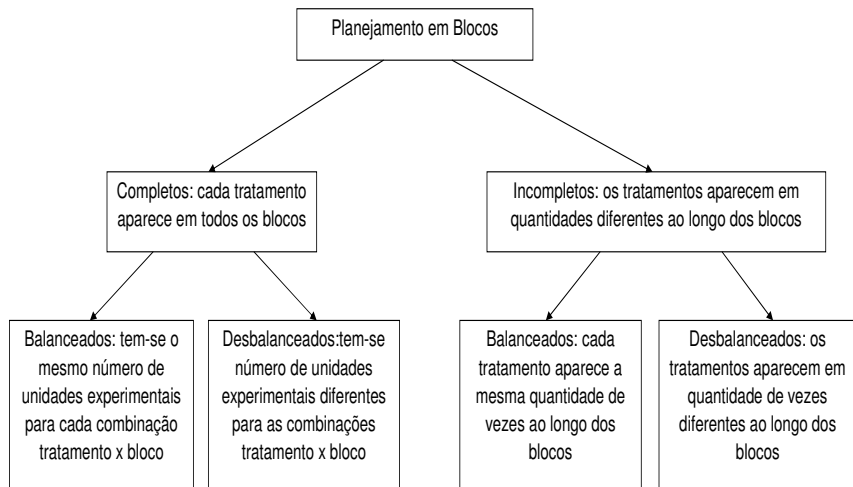
Cont.

- Considere um experimento com um fator de interesse e um fator de perturbação.
- Devido à possibilidade do fator de perturbação influenciar na variável resposta, não podemos alocar as unidades experimentais aleatoriamente ao longo dos níveis do fator de interesse, negligenciando o fator de perturbação.

Cont.

- A idéia é, para cada nível do fator de perturbação, alocar, segundo um PCA, as unidades experimentais aos níveis do fator de interesse.
- À esse processo, dá-se o nome de blocagem. Aos grupos formados pelos níveis do fator de perturbação (ou ao próprio fator em si), dá-se o nome de blocos.

Tipos de planejamentos em Blocos



Continuação

- Note que o bloco pode ser visto, em termos de modelagem, como um fator.
- Em geral, espera-se observar interação entre o fator principal e o bloco (assim como efeito de bloco).
- Contudo, uma abordagem usual consiste em se considerar modelos sem interação. Justificativas: os fatos descritos acima + interesse principal reside no fator de interesse + em geral, temos apenas uma única observação para cada combinação tratamento x bloco.

Estrutura geral: blocos completos balanceados

- Temos a seguinte representação:

Tratamento	Bloco			
	1	2	...	b
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1b}
2	y_{21}	y_{22}	...	y_{2b}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
k	y_{k1}	y_{k2}	...	y_{kb}

Estrutura geral: blocos completos desbalanceados

- Temos a seguinte representação:

Tratamento	Bloco			
	1	2	...	b
1	y_{111}, y_{112}	y_{121}	...	$y_{1b1}, y_{1b2}, y_{1b3}$
2	y_{211}	y_{221}	...	y_{2b1}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	y_{k11}, y_{k12}	y_{k21}	...	y_{kb1}

Estrutura geral: blocos incompletos balanceados, $k=4, b=4$

- Temos a seguinte representação:

Tratamento	Bloco			
	1	2	3	4
1	y_{11}	y_{12}	-	y_{14}
2	-	y_{22}	y_{23}	y_{24}
3	y_{31}	-	y_{33}	y_{34}
4	y_{41}	y_{42}	y_{43}	-

Estrutura geral: blocos incompletos desbalanceados, $k=4, b=4$

- Temos a seguinte representação:

Tratamento	Bloco			
	1	2	3	4
1	y_{11}	y_{12}	—	—
2	—	y_{22}	y_{23}	y_{24}
3	y_{31}	-	-	y_{34}
4	y_{41}	y_{42}	y_{43}	—

Exemplo 6: métodos de quantificação de prêmios de seguros

- Tem-se o interesse de avaliar três métodos de quantificação de prêmios a serem pagos por um seguro (fator de interesse).
- Quinze executivos foram selecionados para avaliar os tipos de métodos de quantificação (MQ) (unidades experimentais).
- Variável resposta: Grau de confiança no método (0 - nenhuma a 20 - muita), atribuído pelo executivo.
- Suspeita-se que a idade possa ter relação com a opinião do executivo (embora esse não seja um fator de interesse). Portanto, a idade será considerado como bloco.

Estrutura do Exemplo 6

- Temos a seguinte representação:

Método	Bloco				
	1 (mais velhos)	2	3	4	5 (mais novos)
U	1	2	7	6	12
W	5	8	9	13	14
C	8	14	16	18	17

- Foram criados 05 blocos, em cada um deles havia os 3 mais velhos (B1), os 3 seguintes mais novos que estes (B2) assim por diante, até chegar aos 3 mais novos (B5).
- Dentro de cada bloco, cada um dos 3 fora alocado (aleatoriamente ?) a cada um dos MQ's, para que lhes atribuísse alguma nota.

Modelo (casela de referência)

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \xi_{ij},$$

(Fator), $i = 1, 2, 3, \dots, k$; (Bloco), $j = 1, 2, 3, \dots, b$

- Erros $\xi_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, μ, α_i, τ_j , não aleatórios.
- Restrições : $\alpha_1 = \tau_1 = 0$.
- Note que o número de blocos fornece o número de unidades experimentais por tratamento. Nesse caso $n = k \times b$.
- Estamos considerando um experimento balanceado (blocos completos balanceados), embora, na prática, possamos ter desbalanceamentos (blocos completos desbalanceados).

Somas de quadrados

- Decomposição da soma de quadrados total:

$$\begin{aligned}SQT &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^b (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = b \sum_{i=1}^k (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + k \sum_{j=1}^b (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \\ &+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^b (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})^2 \\ &= SQF + SQB + SQR,\end{aligned}$$

em que

$$\bar{Y}_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^b Y_{ij}; \bar{Y}_{i.} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b Y_{ij}; \bar{Y}_{.j} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y_{ij}.$$

Tabela de análise de variância

- Temos que:

FV	SQ	GL	QM	Estatística F	pvalor
Fator A	SQF	$k-1$	$QMF = \frac{SQF}{(k-1)}$	$F_A = \frac{QMF}{QMR}$	$\min(F(f_A H_0), S(f_A H_0))$
Bloco	SQB	$b-1$	$QMB = \frac{SQB}{(b-1)}$	$F_B = \frac{QMB}{QMR}$	$\min(F(f_B H_0), S(f_B H_0))$
Resíduo	SQR	$(k-1)(b-1)$	$QMR = \frac{SQR}{[(k-1)(b-1)]}$		
Total	SQT	$n-1$			

FV: fonte de variação, SQ: soma de quadrados, GL: graus de liberdade, QM: quadrado médio. $F(x|H_0), S(x|H_0)$ fda e fds no ponto x sob H_0 , respectivamente. Em geral, não se avalia a magnitude de F_B pois espera-se ,de fato, ter-se efeito de bloco.

Esperanças dos Quadrados Médios

- Expressões:

$$\mathcal{E}(QMF) = \sigma^2 + \frac{b \sum_{i=1}^k (\bar{\mu}_{i.} - \bar{\mu}_{..})^2}{k-1},$$

$$\mathcal{E}(QMB) = \sigma^2 + \frac{k \sum_{j=1}^b (\bar{\mu}_{.j} - \bar{\mu}_{..})^2}{b-1},$$

$$\mathcal{E}(QMR) = \sigma^2,$$

em que

$$\bar{\mu}_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^b \mu_{ij}, \bar{\mu}_{i.} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \mu_{ij}, \bar{\mu}_{.j} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mu_{ij}, \mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j.$$

Análise descritiva

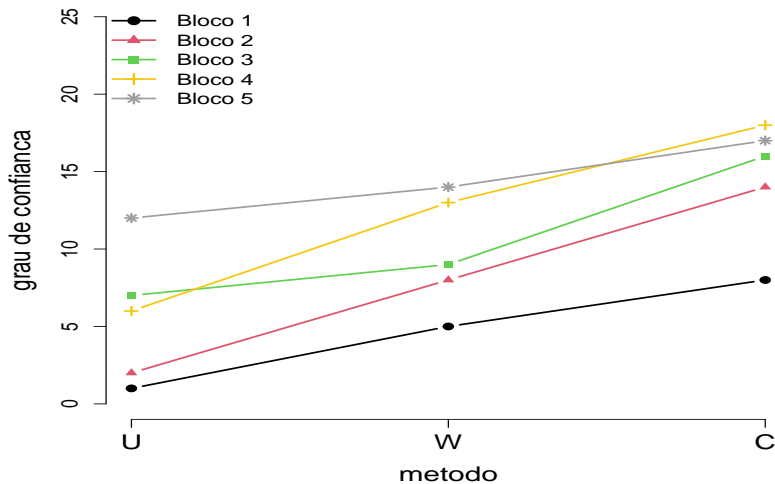
Não há sentido em construir box-plots ou histogramas, tampouco realizar testes de homocedasticidade e normalidade, bem mesmo calcular coeficientes de assimetria e curtose.

Método	Medida descritiva					
	Média	DP	Var.	CV%	Mínimo	Máximo
U	5,60	4,39	19,30	78,45	1,00	12,00
W	9,80	3,70	13,70	37,77	5,00	14,00
C	14,60	3,97	15,80	27,23	8,00	18,00

Análise descritiva

Bloco	Medida descritiva					
	Média	DP	Var.	CV%	Mínimo	Máximo
1	4,67	3,51	12,33	75,25	1,00	8,00
2	8,00	6,00	36,00	75,00	2,00	14,00
3	10,67	4,73	22,33	44,30	7,00	16,00
4	12,33	6,03	36,33	48,87	6,00	18,00
5	14,33	2,52	6,33	17,56	12,00	17,00

Gráfico de perfis (médios)



Modelo para os dados

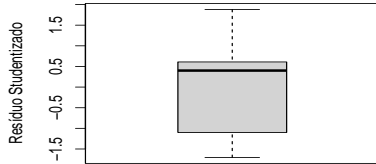
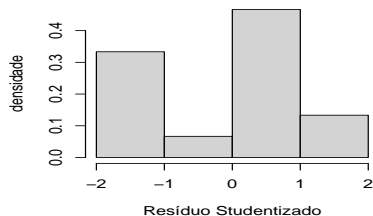
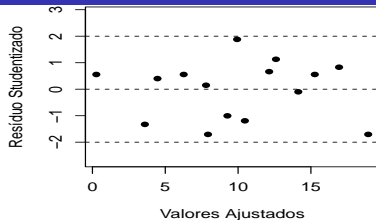
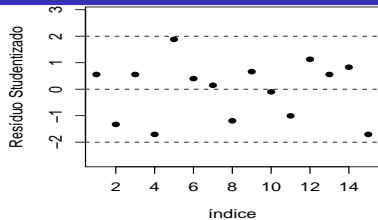
$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \tau_j + \xi_{ij},$$

(Fator), Método de Quantificação, $i =$

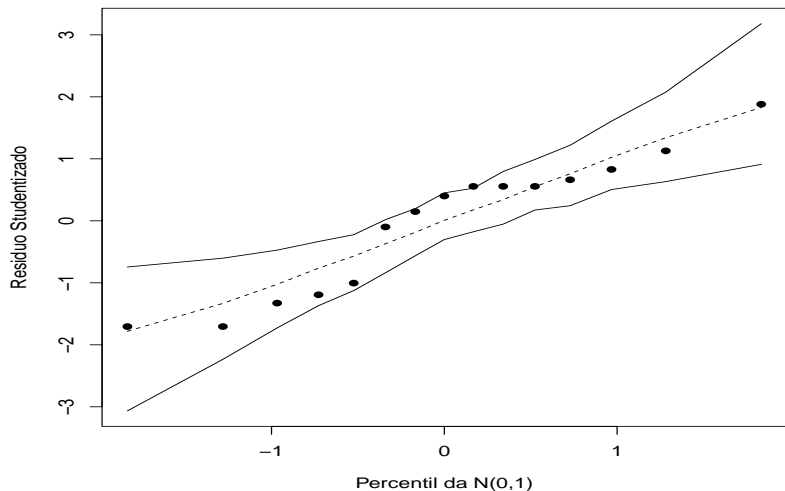
1, 2, 3; (Bloco), faixa etária dos avaliadores, $j = 1, 2, 3, \dots, 5$

- Erros $\xi_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, μ, α_i, τ_j , não aleatórios.
- Restrições : $\alpha_1 = \tau_1 = 0$.
- Y_{ij} : nota dada por um avaliador na faixa etária j ao método de quantificação i .

Análise de resíduos



QQ plot para os resíduos



Comentários

- Parece que as suposições do modelo (homocedasticidade e normalidade) não são válidas para o conjunto de dados em questão.
- Devido a natureza da resposta, um modelo binomial pode ser apropriado.
- O modelo de regressão normal linear, aparentemente, não é adequado para analisar os dados em questão, apesar do ajuste ter melhorado em relação à situação anterior (considerando apenas dois fatores).
- Contudo, seguiremos com ele por questões pedagógicas.

Tabela ANOVA

FV	SQ	GL	QM	Estatística F	pvalor
Método	2	202,80	101,40	33,99	0,0001
Bloco	4	171,33	42,83	14,36	0,0010
Resíduo	8	23,87	2,98		
Total	14	398,00			

Efeito de bloco (esperado). Efeito de Método de quantificação.

Lembrete: o interesse principal reside em comparar os métodos de quantificação.

Estimativas dos parâmetros do modelo

Parâmetro	Estimativa	EP	IC(95%)	Estat. t	pvalor
μ	0,27	1,18	[-2,05;2,58]	0,23	0,8269
α_2	4,20	1,09	[2,06;6,34]	3,84	0,0049
α_3	9,00	1,09	[6,86;11,14]	8,24	<0,0001
β_2	3,33	1,41	[0,57 ; 6,10]	2,36	0,0457
β_3	6,00	1,41	[3,24 ; 8,76]	4,25	0,0028
β_4	7,67	1,41	[4,90 ; 10,43]	5,44	0,0006
β_5	9,67	1,41	[6,90 ; 12,43]	6,85	0,0001

Comparações entre os métodos

- Defina a média do i -ésimo método de quantificação,

$$\mu_i. = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 \mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \bar{\tau}, \bar{\tau} = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 \tau_j.$$

- Comparações de interesse:
 - $H_0 : \mu_{1.} - \mu_{2.} = 0$ vs $H_1 : \mu_{1.} - \mu_{2.} \neq 0$
 - $H_0 : \mu_{1.} - \mu_{3.} = 0$ vs $H_1 : \mu_{1.} - \mu_{3.} \neq 0$
 - $H_0 : \mu_{2.} - \mu_{3.} = 0$ vs $H_1 : \mu_{2.} - \mu_{3.} \neq 0$

Comparações entre os métodos (cont.)

- Comparações de interesse em termos dos parâmetros β :

- $H_0 : \alpha_2 = 0$ vs $H_1 : \alpha_2 \neq 0$

- $H_0 : \alpha_3 = 0$ vs $H_1 : \alpha_3 \neq 0$

- $H_0 : \alpha_2 - \alpha_3 = 0$ vs $H_1 : \alpha_2 - \alpha_3 \neq 0$

- Matrizes \mathbf{C} para comparações do tipo $\mathbf{C}\beta = \mathbf{0}$.

- $\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

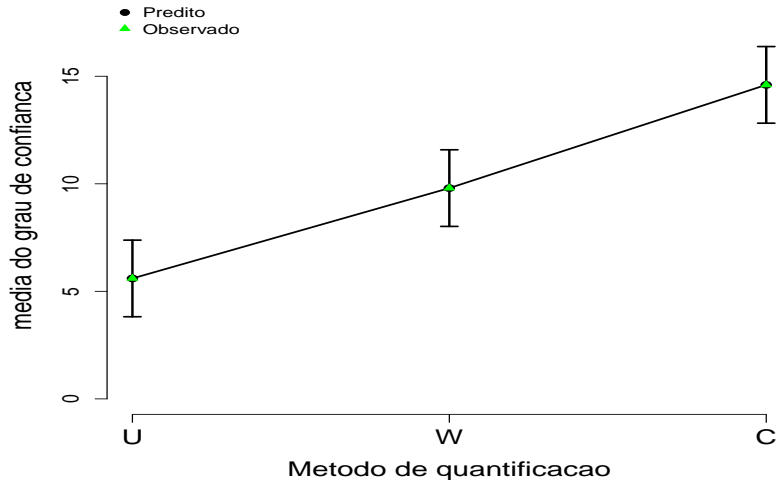
Comparações entre os métodos (cont.)

- Comparações de interesse em termos dos parâmetros β :
 - Pela Tabela com as estimativas dos parâmetros, rejeitamos H_0 , 14,78 (pvalor=0,0049).
 - Pela Tabela com as estimativas dos parâmetros, rejeitamos H_0 , 67,88 (pvalor=<0,0001).
 - Pelo teste $C\beta$, rejeitamos H_0 , 19,31 (0,0023)
- Resta-nos fornecer estimativas para as médias de cada tratamento, através do modelo.

Estimativas finais das médias

Grupo	Estimativa	EP	IC(95%)
U	5,60	0,77	[4,09 ; 7,11]
W	9,80	0,77	[8,29 ; 11,31]
C	14,60	0,77	[13,09 ; 16,11]

Gráfico de perfis médios ajustados



Comentários

- O modelo não se ajustou bem aos dados.
- Há um efeito “decrecente” de bloco (faixa etária).
- Os três tratamentos apresentaram desempenhos diferentes, do U (pior), W (mediano) e C (melhor)