

# Revisão de Álgebra de Matrizes

Prof. Caio Azevedo

## Revisão de álgebra de matrizes

- Uma matriz é um arranjo retangular de elementos (números, variáveis aleatórias, letras):

$$\mathbf{A}_{(2 \times 3)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

- Um vetor é uma matriz com somente uma linha (vetor linha) ou somente uma coluna (vetor coluna).

$$\mathbf{A}_{(1 \times 3)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{bmatrix}; \mathbf{A}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix}$$

- Se a matriz tiver apenas uma linha e uma coluna teremos um escalar.

- Denotaremos uma matriz ou vetor por uma letra maiúscula ou minúscula em negrito.
- Uma matriz é dita ser quadrada se o número de linhas for igual ao número de colunas.

$$\mathbf{A}_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal: matriz quadrada em que todos os elementos fora da diagonal principal são iguais à 0.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal inferior: matriz quadrada em que todos os elementos acima da diagonal principal são iguais à 0.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

- Matriz diagonal superior: matriz quadrada em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais à 0.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$

- Matriz identidade: matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são todos iguais à 1.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz simétrica ( $A_{ij} = A_{ji}$ ),  $\forall i, j; i \neq j$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

# Operações com matrizes

- Soma de matrizes :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \\ A_{31} + B_{31} & A_{32} + B_{32} \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \\ A_{31}B_{11} + A_{32}B_{21} & A_{31}B_{12} + A_{32}B_{22} \end{bmatrix}$$

- Traço de uma matriz quadrada: é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

- O operador  $\text{vec}$  cria um vetor coluna, a partir de uma matriz, pela concatenação de suas colunas:

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = \text{vec} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \\ A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{bmatrix}$$

- Sejam  $\mathbf{A}_{(n \times p)}$  e  $\mathbf{B}_{(m \times q)}$  duas matrizes quaisquer. O produto de Kronecker entre elas é definido por:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{11}\mathbf{B} & A_{12}\mathbf{B} & \dots & A_{1p}\mathbf{B} \\ A_{21}\mathbf{B} & A_{22}\mathbf{B} & \dots & A_{2p}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1}\mathbf{B} & A_{n2}\mathbf{B} & \dots & A_{np}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

- A resultante do produto de Kronecker será uma matriz  $\mathbf{C}_{(nm \times pq)}$ .
- O posto ou “rank” de uma matriz é o mínimo entre o número de linhas (posto linha) ou colunas (posto coluna) linearmente independentes.

- Matriz transposta (cada coluna da matriz original é transformada em uma linha) :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Determinante de uma matriz quadrada: é uma função que associa um escalar para uma dada matriz quadrada. Existem alguns métodos para se calcular o determinante de uma matriz. Exemplo:

$$|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = -1 - 8 = -9$$

- Inversa de uma matriz : a inversa de uma matriz quadrada  $\mathbf{A}$  denotada por  $\mathbf{A}^{-1}$  é tal que:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Existem diversos métodos para se obter (numericamente) a inversa de uma matriz. A solução analítica é dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{C}$$

em que  $\mathbf{C}$  é a matriz adjunta de  $\mathbf{A}$ , ou seja, a transposta da matriz que se obtém substituindo cada termo  $A_{ij}$  pelo determinante da matriz resultante ao se retirar de  $\mathbf{A}$  a linha  $i$  e a coluna  $j$  multiplicado por  $(-1)^{i+j}$ . Naturalmente, se  $\det(\mathbf{A}) = 0$  sua inversa não existe.

- Inversa generalizada de uma matriz (não necessariamente quadrada), é uma matriz  $\mathbf{A}^-$  tal que

$$\mathbf{AA}^- \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

- Em princípio, uma matriz pode ter infinitas inversas generalizadas.
- Mesmo que o  $\det(\mathbf{A}) = 0$  sua inversa generalizada pode ser obtida.

- Autovalores de uma matriz quadrada de dimensão  $n$ : são os  $n$  números, digamos  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)'$ , que satisfazem:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

- Autovetores de uma matriz quadrada de dimensão  $n$ : são os  $n$  vetores que satisfazem a seguinte relação:

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i; i = 1, \dots, n$$

Os autovalores e autovetores são de extrema importância na decomposição e na verificação de certas propriedades de matrizes.

# Tipos de matrizes

- Uma matriz (quadrada) é dita ser idempotente se  $\mathbf{AA} = \mathbf{A}$ .
- Uma matriz (quadrada) é dita ser ortogonal  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}'$ .
- Uma matriz (quadrada) é dita ser:
  - Positiva definida: se  $\lambda_i > 0, \forall i$ .
  - Positiva semi-definida: se  $\lambda_i \geq 0, \forall i$  e  $\exists$  pelo menos um  $\lambda_i = 0$ .
  - Negativa semi-definida: se  $\lambda_i \leq 0, \forall i$  e  $\exists$  pelo menos um  $\lambda_i = 0$ .
  - Negativa definida: se  $\lambda_i < 0, \forall i$ .

# Propriedades

- Se todas as operações estiverem bem definidas, teremos:
- $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$ .
- $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$ .
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ .
- $tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B})$ .
- $tr(a\mathbf{A}) = atr(\mathbf{A})$ ,  $a$  um escalar.
- $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$ .

- $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}')$ .
- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = [\det(\mathbf{A})]^{-1}$ .
- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$  se  $A$  e  $B$  forem ambas quadradas.
- $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}$ .
- $a \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes a = a\mathbf{A}$ ,  $a$  escalar.
- $a\mathbf{A} \otimes b\mathbf{B} = ab(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$ .
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$ .
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' = (\mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}')$ .
- $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1})$ .
- $tr(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A})tr(\mathbf{B})$ .
- Para  $\mathbf{A}_{(m \times m)}$  e  $\mathbf{B}_{(n \times n)}$ , temos que  $|\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}| = |\mathbf{A}|^m |\mathbf{B}|^n$

# Decomposição de Cholesky

- Seja  $\Sigma_{p \times p}$ , simétrica e positiva definida (todos os seus auto-valores são positivos).
- Exemplo: Matriz de covariâncias e matriz de correlações.
- Definição: Dada uma matriz  $\Sigma$  existe uma matriz  $L$ , diagonal inferior com os valores da diagonal estritamente positivos,  $\Sigma = LL'$ .
- Tal decomposição é única.
- Existem alguns algoritmos que possibilitam a obtenção de  $L$ .

# Exemplo

- Exemplo:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0.5 \\ 1 & 2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} \approx \begin{bmatrix} 1,732 & 0 & 0 \\ 0,577 & 1,291 & 0 \\ 0,289 & 0,491 & 1,917 \end{bmatrix}$$

- Seja  $\Sigma_{p \times p}$ . Então,  $\Sigma$  pode ser fatorizada como

$$\Sigma = \mathbf{E}\Lambda\mathbf{E}'$$

em que  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  (autovalores) e as colunas da matriz  $\mathbf{E}$  são formadas pelos respectivos autovetores orto-normalizados.

- A decomposição acima também vale se autovetores não estiverem ortonormalizados, neste caso, ela é dada por:

$$\Sigma = \mathbf{E}\Lambda\mathbf{E}^{-1}$$

- **Exercícios:** pesquisar sobre as propriedades do *vec* e também sobre diferenciação matricial.
- **Observação:** basicamente todas as operações e decomposições matriciais apresentadas estão implementadas no programa R.