Intervalos de Confiança e Testes de Hipóteses

Prof. Caio Azevedo

Relação entre TH e IC

- Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 conhecido.
- Para testar as hipóteses $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$, podemos utilizar um teste tal que sua RC seja dada por:

$$RC = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : \left| \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > z_{\alpha/2} \right\}$$

com RA dada por:

$$\begin{aligned} RA \equiv A(\mu_0) &= \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : \left| \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leq z_{\alpha/2} \right\} \\ &= \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : -z_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2} \right\} \end{aligned}$$

Relação entre TH e IC

- (cont.) em que $P(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1+\alpha}{2}$. Considere também $(c(\boldsymbol{x}))$ definido por:

$$c(\boldsymbol{x}) = \left\{ \mu_0 \in \mathcal{R} : \left| \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leq z_{\alpha/2} \right\}$$

- Portanto, como μ_0 foi escolhido arbitrariamente, então

$$c(\boldsymbol{X}) = \left\{ \mu \in \mathcal{R} : \overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} \subseteq \Theta$$

é um IC para μ.

Relação entre TH e IC

- (cont.) Note que

$$
\begin{aligned}
& P_{\mu_0}\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\
= \quad & P_{\mu_0}\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq z_{\alpha/2}\right)
\end{aligned}
$$

- Assim a relação entre os conjuntos $RA(\mu_0)$ e $c(\boldsymbol{X})$ é dada por :

$$
\boldsymbol{x} \in A(\mu_0) \leftrightarrow \mu_0 \in c(\boldsymbol{x}).
$$

Relação entre TH e IC

- Teorema:
  - Para cada $\theta_0 \in \Theta$, seja $A(\theta_0)$ a RA de nível α de um teste para testar $H_0 : \theta = \theta_0$.
    - Para cada $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ seja $c(\boldsymbol{x}) = \{\theta_0 \in \Theta : \boldsymbol{x} \in A(\theta_0)\}$. Então $c(\boldsymbol{X})$ é um IC com cc $\gamma = 1 - \alpha$.
  - Reciprocamente, seja $c(\boldsymbol{x})$ é um intervalo de confiança com cc $\gamma = 1 - \alpha$.
    - Para cada $\theta_0 \in \Theta$, definimos o conjunto $A(\theta_0) = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : \theta_0 \in c(\boldsymbol{x})\} \subseteq \mathcal{X}$. Então, $A(\theta_0)$ é a RA de nível $\alpha\,(\alpha = 1 - \gamma)$ do teste $H_0 : \theta = \theta_0$.
  - Prova: Exercício:

Exercício

- Seja $X_1, ..., X_n$ aa de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Deseja-se obter um IC unilateral à direita para μ (ou seja $(-\infty, t(\boldsymbol{x})]$, usando testes de hipóteses para testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs } H_1 : \mu < \mu_0$$

- Sabemos que

$$RC = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < t_\alpha \right\}$$

é uma RC.

Exercício

- Neste caso, a RA é dada por

$$
\begin{aligned}
A(\mu_0) &= \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > +t_\alpha \right\} \\
&= \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n : \overline{x} > \mu_0 + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \right\}
\end{aligned}
$$

- Logo (lembrando que, essencialmente, $t_\alpha < 0$),

$$
c(\boldsymbol{x}) = \left\{ \mu \in \mathcal{R}^n : \mu < \overline{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \right\}
$$

Exercício

- Assim, um IC unilateral à direita com cc $\gamma = 1 - \alpha$ é dado por:

$$IC[\mu, \gamma] = \left(-\infty, \overline{X} + t_{\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

- Exercício: Faça o análogo para obter o IC unilateral à esquerda.
- Raciocínio análogo pode ser aplicado para se obter ICUMA (IC unilaterais uniformemente mais acurados), mencionados aqui, bastando, para isso, encontrar a RA do respectivo TUMP (apropriado) e, a partir dela, construir o IC.