

Intervalos de Confiança e Testes de Hipóteses

Prof. Caio Azevedo

Relação entre TH e IC

- Seja X_1, \dots, X_n uma aa de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 conhecido.
- Para testar as hipóteses $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$, podemos utilizar um teste tal que sua RC seja dada por:

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n : \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > z_{\alpha/2} \right\}$$

com RA dada por:

$$\begin{aligned} RA \equiv A(\mu_0) &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n : \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leq z_{\alpha/2} \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n : -z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2} \right\} \end{aligned}$$

Relação entre TH e IC

- em que $P(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1+\alpha}{2}$. Considere também $(c(\mathbf{x}))$ definido por:

$$c(\mathbf{x}) = \left\{ \mu_0 \in \mathcal{R} : \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leq z_{\alpha/2} \right\}$$

- Portanto, como μ_0 foi escolhido arbitrariamente, então

$$c(\mathbf{X}) = \left\{ \mu \in \mathcal{R} : \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} \subseteq \Theta$$

é um IC para μ . Note que

$$\begin{aligned} & P_{\mu_0} \left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \\ &= P_{\mu_0} \left(\left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \leq z_{\alpha/2} \right) \end{aligned}$$

Relação entre TH e IC

- Assim a relação entre os conjuntos $RA(\mu_0)$ e $c(\mathbf{X})$ é dada por :

$$\mathbf{x} \in A(\mu_0) \leftrightarrow \mu_0 \in c(\mathbf{x}).$$

- Teorema:

- Para cada $\theta_0 \in \Theta$, seja $A(\theta_0)$ a RA de nível α de um teste para testar $H_0 : \theta = \theta_0$. Para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ seja $c(\mathbf{x}) = \{\theta_0 \in \Theta : \mathbf{x} \in A(\theta_0)\}$. Então $c(\mathbf{X})$ é um IC com cc $\gamma = 1 - \alpha$.
- Reciprocamente, seja $c(\mathbf{x})$ é um intervalo de confiança com cc $\gamma = 1 - \alpha$. Para cada $\theta_0 \in \Theta$, definimos o conjunto $A(\theta_0) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n : \theta_0 \in c(\mathbf{x})\} \subseteq \mathcal{X}$. Então, $A(\theta_0)$ é a RA de nível α ($\alpha = 1 - \gamma$) do teste $H_0 : \theta = \theta_0$.
- Prova: Exercício:

Exercício

- Seja X_1, \dots, X_n aa de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Deseja-se obter um IC unilateral à direita para μ (ou seja $(-\infty, t(\mathbf{x})]$), usando testes de hipóteses para testar $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$
- Sabemos que $RC = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n : \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < t_\alpha \right\}$ é uma RC.
- Neste caso, a RA é dada por

$$\begin{aligned} A(\mu_0) &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n : \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > +t_\alpha \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{R}^n : \bar{x} > \mu_0 + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \right\} \end{aligned}$$

- Logo (lembrando que, essencialmente, $t_\alpha < 0$),

$$c(\mathbf{x}) = \left\{ \mu \in \mathcal{R}^n : \mu < \bar{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \right\}$$

Exercício

- Assim, um IC unilateral à direita com cc $\gamma = 1 - \alpha$ é
$$IC[\mu, \gamma] = \left(-\infty, \bar{X} + t_{\alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$
- Faça o análogo para obter o IC unilateral à esquerda.
- Raciocínio análogo pode ser aplicado para se obter ICUUMA (IC unilaterais uniformemente mais acurados)
(http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/aula_Met_Estim_Mest_Int_IC_2S_2019.pdf) bastando, para isso, encontrar a RA do respectivo TUMP (apropriado) e, a partir dela, construir o IC.