

Família de localização-escala

Prof. Caio Azevedo

Família de localização - escala

- Uma outra família bastante importante de distribuições é a família de localização-escala (FLE) e as respectivas famílias que são casos particulares dela (FLE).
- As aplicações da FLE vão desde a obtenção de quantidades pivotais (conceito que veremos mais adiante) até a construção de modelos de regressão (mais gerais que o modelo de regressão normal linear [aqui](#))

Família de localização - escala

- Teorema : Seja $g(\cdot)$ uma fdp, $x \in \mathcal{R}$ e $\theta \in \Theta = \mathcal{R} \times \mathcal{R}^+$, $\theta = (\mu, \sigma^2)$. Então a função

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x), \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

é uma legítima fdp. Prova: exercício.

Família de localização

- Def: A distribuição $f_X(\cdot, \mu)$ pertence à família de localização (FL) ($\mu \in \mathcal{R}$) se $f_X(x; \mu) = g(x - \mu)\mathbb{1}_A(x)$, $A \subseteq \mathcal{R}$.
- Além disso, a distribuição de $Y = X - \mu$ não depende de μ e \exists uma var Z , $X = \mu + Z$ e $f_Z(z) = g(z)\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(z)$.
- Exemplos.
 - $X \sim N(\mu, 1)$:

$$f_x(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right\} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x) = g(x - \mu)\mathbb{1}_A(x)$$

Família de localização

■ Exemplos (cont.)

- Exponencial deslocada (truncada):

$$f_X(x, \mu) = e^{-(x-\mu)} \mathbb{1}_{(\mu, \infty)}(x) = g(x - \mu) \mathbb{1}_{(\mu, \infty)}(x).$$

- Uniforme contínua: $X \sim U(\theta - a, \theta + a)$, $\theta \in \mathcal{R}$, $a \in \mathcal{R}$ (este, conhecido):

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{2a} \mathbb{1}_{(\theta-a, \theta+a)}(x) = \frac{1}{2a} \mathbb{1}_{(-a, a)}(x - \theta) = h(x - \theta)$$

- $X \sim \text{Cauchy}(\mu, 1)$:

$$f_X(x; \mu) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (x - \mu)^2} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x)$$

Família de escala

- Def: A distribuição $f_X(\cdot, \sigma^2)$ pertence à família de escala (FES) ($\sigma^2 \in \mathcal{R}^+$) se $f_X(x; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x}{\sigma}\right) \mathbb{1}_A(x)$, $A \subseteq \mathcal{R}$.
- Além disso, a distribuição de $Y = \frac{X}{\sigma}$ não depende de σ^2 e \exists uma var Z , $X = \sigma Z$ e $f_Z(z) = g_Z(z) \mathbb{1}_{A^*}(z)$, $A^* \subseteq \mathcal{R}$.
- Exemplos.
 - $X \sim N(0, \sigma^2)$:

$$f_x(x; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x}{\sigma}\right) \mathbb{1}_A(x).$$

Família de escala (cont. dos exemplos)

- Exponencial: $X \sim \exp(\theta)$,

$$f_X(x; \theta) = \frac{e^{-x/\theta}}{\theta} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x) = \frac{1}{\theta} g(x/\theta) \mathbb{1}_A(x).$$

- Uniforme contínua: Se $X \sim U(0, \theta)$,

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{(0, \theta)}(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{(0, 1)}(x/\theta) = \frac{1}{\theta} g(x/\theta) \mathbb{1}_A(x).$$

Família de localização-escala

- Def: A distribuição $f_X(\cdot, \theta)$ pertence à família de localização-escala (FLE) ($\theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^+$) se $f_X(x; \theta) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x)$.
- Além disso, a distribuição de $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ não depende de θ e \exists uma *vac* Z , $X = \mu + \sigma Z$ e $f_Z(z) = g(z) \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(z)$.
- Exemplos.
 - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x).$$

Família de localização-escala (cont. dos exemplos)

- $X \sim \text{Cauchy}(\mu, \sigma^2)$:

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{\pi\sigma} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathbb{1}_{\mathcal{R}(x)} = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{\mathcal{R}(x)}.$$

- $X \sim \text{Laplace}(\mu, \sigma)$:

$$\frac{1}{2\sigma} \exp\left\{-\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|\right\} \mathbb{1}_{\mathcal{R}(x)} = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{\mathcal{R}(x)}.$$

Família de localização-escala

- Teorema: Seja g uma fdp, $\mu \in \mathcal{R}, \sigma^2 \in \mathcal{R}^+$. Então X é uma vac com fdp

$$f_X(\mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{A^*}(x), A^* \subseteq \mathcal{R}$$

se, e somente se, \exists uma vac Z , $X = \mu + \sigma Z$ e

$$f_Z(z) = g(z) \mathbb{1}_{A^*}(z), A^* \subseteq \mathcal{R}.$$

Família de localização-escala

- Dem: (\leftarrow) Defina $x = \mu + \sigma z = h(z)$. Dessa forma $x = h(z)$ é uma transformação 1 a 1, logo $z = h^{-1}(x)$. Pelo método do Jacobiano temos que:

$$f_X(x; \theta) = \left| \frac{d}{dx} h^{-1}(x) \right| f_Z(h^{-1}(x); \theta)$$

$$\text{mas } h^{-1}(x) = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow f_X(x; \theta) = \frac{1}{\sigma} f_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_A(x)$$

Família de localização-escala

- Dem: (\rightarrow) Seja $f_X(x; \theta) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \mathbb{1}_A(x)$ defina $h(x) = \frac{x-\mu}{\sigma}$.
- Seja $z = h(x)$. Como h é uma transformação 1 a 1, temos que $x = z\sigma + \mu = h^{-1}(z)$. Portanto, pelo método do Jacobiano, temos que:

$$\begin{aligned} f_Z(z; \theta) &= \left| \frac{d}{dz} h^{-1}(z) \right| f_X(h^{-1}(z)) = \\ &= \frac{\sigma}{\sigma} g(z) \mathbb{1}_{A^*}(z) = g(z) \mathbb{1}_{A^*}(z) = f_Z(z) \end{aligned}$$