Família exponencial

Prof. Caio Azevedo

Introdução

- Há basicamente três aspectos inferenciais relativos ao parâmetro (θ)
  - Estimação pontual: produzir uma estimativa pontual (número) para θ, a mais acurada possível.
  - Estimação intervalar: produzir uma estimativa intervalar (intervalo numérico) para θ, a mais acurada possível. Pode ser estendido para intervalos de confiança simultâneos e regiões de confiança.
  - Teste de hipótese: propor um mecanismo de decisão para escolher uma entre duas hipóteses, da forma mais acurada possível. Pode ser estendido para três ou mais hipóteses no total, escolhendo-se pelo menos duas.

Famílias especiais de distribuições de probabilidade

- Existem várias famílias de distribuições de probabilidade que apresentam diversas propriedades de interesse.
- Algumas dessas propriedades (de algumas dessas famílias) permitem encontrar resultados (sub-)ótimos, em relação à elementos de Inferência Estatística.
- Exemplos de famílias especiais: família exponencial, família de distribuições elípticas, família de localização-escala, família de mistura de escala, família de mistura de localização-escala, família Tweedie, família de modelos exponenciais de dispersão entre outras.

Famílias especiais de distribuições de probabilidade

- Nos focaremos nas seguintes famílias:
    - Família exponencial (FE).
    - Família de localização (FL).
    - Família de escala (FES).
    - Família de localização-escala (FLE).

Família exponencial

- A FE é de extrema importância no estudo dos modelos (de regressão) lineareas generalizados (aqui).
- Congrega tanto distribuições discretas quanto contínuas.
- Apresenta diversas propriedades que facilitam/permitem a demonstração/obtenção de resultados inferenciais (muito) importantes.

Família exponencial

- Dizemos que a distribuição de uma va X pertence à família exponencial k-paramétrica (notação: $X \sim FE_k(\boldsymbol{\theta})$) se sua fdp é da forma:

$$f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = h(x)\exp\left\{\sum_{j=1}^{k} c_j(\boldsymbol{\theta})t_j(x) + d(\boldsymbol{\theta})\right\}\mathbb{1}_A(x)$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, .., \theta_k)' \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$,
$h : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^+$ (não depende de $\boldsymbol{\theta}$), $c_j : \mathcal{R}^k \to \mathcal{R}$ (não depende de x),
$t_j : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ (não depende de $\boldsymbol{\theta}$), $d : \mathcal{R}^k \to \mathcal{R}$, (não depende de x),
$j = 1, 2, ..., k$, $A \in \mathcal{R}$ (não depende de $\boldsymbol{\theta}$).

Família exponencial

- Caso particular de grande importância: família exponencial bi-paramétrica (aqui)
- (Algumas) Formas alternativas:
  - $f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = h(x)a(\boldsymbol{\theta})\exp\left\{\sum_{j=1}^{k} c_j(\boldsymbol{\theta})t_j(x)\right\}\mathbb{1}_A(x)$, $a(\boldsymbol{\theta}) = exp\{d(\boldsymbol{\theta})\}$.
  - $f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} c_j(\boldsymbol{\theta})t_j(x) + d(\boldsymbol{\theta}) + g(x)\right\}\mathbb{1}_A(x)$, $g(x) = \exp\{\ln h(X)\}$.
  - $f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} c_j(\boldsymbol{\theta})t_j(x) + g(x)\right\}a(\boldsymbol{\theta})\mathbb{1}_A(x)$, $a(\boldsymbol{\theta}) = exp\{d(\boldsymbol{\theta})\}$ e $g(x) = \exp\{\ln h(X)\}$.

Exemplo 1: Bernoulli $(\theta), \theta \in (0,1)$

- Temos que:

$$
\begin{aligned}
f_X(x;\theta) &= \theta^x(1-\theta)^{1-x}\mathbb{1}_{\{0,1\}}(x) \\
&= \exp\{x\ln\theta - x\ln(1-\theta) + \ln(1-\theta)\}\,\mathbb{1}_{\{0,1\}}(x) \\
&= \exp\left\{x\ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) + \ln(1-\theta)\right\}\mathbb{1}_{\{0,1\}}(x) \\
&= h(x)\exp\{c(\boldsymbol{\theta})t(x) + d(\boldsymbol{\theta})\}\,\mathbb{1}_A(x)
\end{aligned}
$$

em que $c(\theta) = \ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$, $t(x) = x$, $d(\theta) = \ln(1-\theta)$, $\mathrm{h(x)} = 1$ e $A = \{0,1\}$. Assim, $X \sim FE(\theta)$.

Exemplo 2: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

- Temos que $((\mu, \sigma^2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^+$ desconhecidos, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2))$ e:

$$
\begin{aligned}
f_X(x;\theta) &= \exp\left\{\frac{-(x^2 - 2x\mu + \mu^2)}{2\sigma^2}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x)\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{x\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x)\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{x\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma\right\} \\
&= h(x)\exp\left\{\sum_{j=1}^{2} c_j(\boldsymbol{\theta})t_j(x) + d(\boldsymbol{\theta})\right\}\mathbb{1}_A(x)
\end{aligned}
$$

em que $c_1(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2\sigma^2}$, $c_2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $t_1(x) = x^2$, $t_2(x) = x$,
$d(\theta) = -\frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \ln\sigma$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x)$ e $A = \mathcal{R}$. Assim, $X \sim FE_2(\boldsymbol{\theta})$.

Outros exemplos

- Outras distribuições que pertencem à família exponencial.
  - binomial(n, θ), $n \in \mathcal{N}^+$ (conhecido) e $\theta \in (0, 1)$.
  - Poisson(θ), $\theta \in \mathcal{R}^+$.
  - gama(r, θ), $(r, \theta) \in \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^+$.
  - geométrica$(\theta), \theta \in (0, 1)$.
  - beta$(a, b), (a, b) \in \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^+$.
  - multinomial$_p(n, \boldsymbol{\theta})$, $n \in \mathcal{N}$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{p-1})$, $\theta_i \in (0, 1), i = 1, 2, ..., p-1$, $\sum_{j=1}^{p-1} \theta_j \in (0, 1)$, veja mais aqui.
  - $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{R}^p$, $\boldsymbol{\Sigma}$: positiva definida, veja mais aqui.

Exemplos de distribuições que não pertencem à FE

- Distribuições cujo suporte (conjunto A) depende de $\boldsymbol{\theta}$.
  - $U(0,\theta)$, $\theta \in \mathcal{R}^{+}$.
  - $f_X(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}\mathbb{1}_{(\theta,\infty)}(x)$, $\theta \in \mathcal{R}^{+}$.
- Cauchy(μ,σ^2), $\mu \in \mathcal{R}$ e $\sigma^2 \in \mathcal{R}^{+}$,

$$f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi\sigma}\frac{1}{1+\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x).$$

- Exercício: apresentar, pelo menos, três (outras) distribuições que não pertencem à família exponencial.

- Resultado: Seja $X_1, ..., X_n$ uma aa de $X \sim FE_k(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathcal{R}^k$.

  Então a distribuição de $\boldsymbol{X} = (X_1, .., X_n)'$ pertence à $FE_k(\boldsymbol{\theta})$.

- Demonstração:

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) \underbrace{=}_{iid} & \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\boldsymbol{\theta}) \\
= & \prod_{i=1}^{n} \left\{ h(x_i) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{k} c_j(\boldsymbol{\theta}) t_j(x_i) + d(\boldsymbol{\theta}) \right\} \mathbb{1}_A(x_i) \right\} \\
= & \prod_{i=1}^{n} h(x_i) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{k} c_j(\boldsymbol{\theta}) \sum_{i=1}^{n} t_j(x_i) + nd(\boldsymbol{\theta}) \right\} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_A(x_i) \\
= & h^*(\boldsymbol{x}) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{k} c_j(\boldsymbol{\theta}) t_j^*(\boldsymbol{x}) + d^*(\boldsymbol{\theta}) \right\} \mathbb{1}_{A^*}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

Teorema

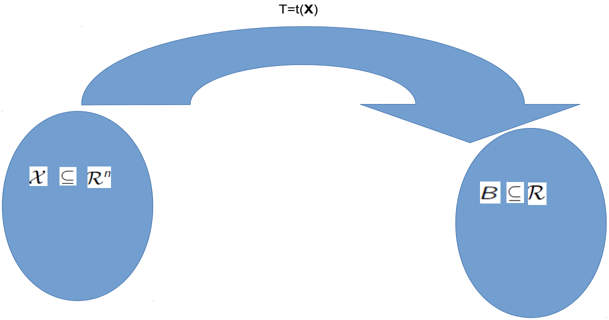
- Dessa forma $\boldsymbol{X} \sim FE_k(\boldsymbol{\theta})$ (se cada va pertence à FE então, a distribuição conjunta também pertence à FE).
- Do resultado (slide) anterior, note que, se $k = 1$, então:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) = h^*(\boldsymbol{x}) \exp\left\{c(\theta)t^*(\boldsymbol{x}) + d^*(\theta)\right\} \mathbb{1}_A(\boldsymbol{x})$$

em que $t^*(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} t(x_i)$ e as outras quantidades são como no slide anterior.

- Teorema: Seja $X_1, .., X_n$ uma aa de $X \sim FE(\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}$. Então a distribuição de $T = t(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} t(X_i)$ também pertence à $FE(\theta)$.

Transformação (Teorema): Caso discreto



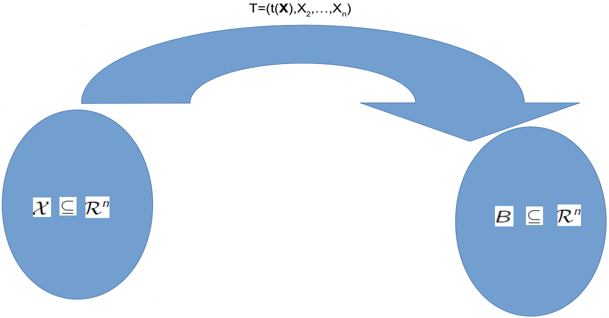
Teorema

- Demonstração: 1) Caso discreto.

$$
\begin{aligned}
f_T(t;\theta) &= P_\theta(T = t) = \sum_{\boldsymbol{x}:t(\boldsymbol{x})=t} P_\theta(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{x}:t(\boldsymbol{x})=t} h(\boldsymbol{x}) \exp\{c(\theta)t(\boldsymbol{x}) + d(\theta)\} \mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{x}:t(\boldsymbol{x})=t} h(\boldsymbol{x}) \exp\{c(\theta)t + d(\theta)\} \mathbb{1}_B(t) \\
&= \exp\{c(\theta)t + d(\theta)\} \mathbb{1}_B(t) \sum_{\boldsymbol{x}:t(\boldsymbol{x})=t} h(\boldsymbol{x}) \\
&= g(t) \exp\{c(\theta)t + d(\theta)\} \mathbb{1}_B(t)
\end{aligned}
$$

Assim $T \sim FE(\theta)$.

Transformação (Teorema): Caso contínuo



Teorema

- Demonstração: 2) Caso contínuo.
- Utilizaremos o método do Jacobiano. Suporemos que a transformação t é 1 a 1, ou seja, $T_i = t(X_i) \leftrightarrow X_i = t^{-1}(T_i)$.
- Para usar o método do Jacobiano, vamos definir as seguintes transformações:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= T = \sum_{i=1}^{n} t(X_i) = t(X_1) + \sum_{i=2}^{n} t(X_i) \\
Y_j &= X_j, j = 2, 3, ..., n
\end{aligned}
$$

Teorema

- Dessa forma, como a transformação é 1 a 1, as transformações inversas são dadas por

$$
\begin{aligned}
X_j &= Y_j, j = 2, 3, ..., n \\
t(X_1) &= Y_1 - \sum_{i=2}^{n} t(Y_i) \to X_1 = t^{-1}(\underbrace{Y_1 - \sum_{i=2}^{n} t(Y_i)}_{W}) = t^{-1}(W)
\end{aligned}
$$

Teorema

- Por outro lado, temos que o Jacobiano é dado por:

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

Teorema

- Em que

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \in \{2, ..., n\} \\ 0, & \text{se } i \neq j \in \{2, ..., n\} \end{cases}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_j} = \begin{cases} \frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial w}, & \text{se } j = 1 \\ -\frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial w} \frac{\partial t(y_j)}{\partial y_j} & , \text{se } j \in \{2, ..., n\} \end{cases}$$

Teorema

- Dessa forma:

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial \boldsymbol{Ax}}{\partial \boldsymbol{x}}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial w} & -\frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial y_2}\frac{\partial t(w)}{\partial y_2} & -\frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial y_3}\frac{\partial t(w)}{\partial w} & \cdots & -\frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial y_n}\frac{\partial t(w)}{\partial y_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $|\boldsymbol{J}| = \left|\frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial w}\right|$.

Teorema

- Logo (lembrando que $t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} t(x_i) = y_1$):

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y};\theta) &= |\boldsymbol{J}| f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{y});\theta)\mathbb{1}_B(\boldsymbol{y}) \\
&= \left|\frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial w}\right| .h(\boldsymbol{x}) \exp\left\{c(\theta)t(\boldsymbol{x}) + d(\theta)\right\} \mathbb{1}_B(\boldsymbol{y}) \\
&= \left|\frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial w}\right| .[h(t^{-1}(w)) \prod_{i=2}^{n} h(y_i)] \\
&\times \exp\left\{c(\theta)y_1 + d(\theta)\right\} \mathbb{1}_B(\boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

Teorema

- Assim, temos que:

$$
\begin{aligned}
f_{Y_1}(y_1;\theta) &= \int \dots \int f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y};\theta) dy_2 \dots dy_n \\
&= \exp\left\{c(\theta)y_1 + d(\theta)\right\} \mathbb{1}_c(y_1) \\
\times & \left[\int \dots \int \left|\frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial w}\right| [h(t^{-1}(w)) \prod_{i=2}^{n} h(y_i)] dy_2 \dots dy_n\right] \\
\rightarrow & \quad f_{Y_1}(y_1;\theta) = f_T(t;\theta) = h(t)\exp\left\{c(\theta)t + d(\theta)\right\} \mathbb{1}_c(t)
\end{aligned}
$$

Teorema

- Em que

$$h(y_1) \quad = \quad h(t) = \int \dots \int \left| \frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial y_1} \right| [h(t^{-1}(w)) \prod_{i=2}^{n} h(y_i)] dy_2 \dots dy_n.$$

Portanto, $T \sim FE(\theta)$.

Cont.

- OBS: Se a transformação não for 1 a 1, o resultado ainda vale. Basta dividir $\mathcal{X}$ em tantas regiões quantas forem necessárias de modo a se obter transformações 1 a 1, em cada uma delas.
- Outros resultados:
  - (vetor aleatório) Se $\boldsymbol{X}_i = (X_1, ..., X_p)' \sim FE_k(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$, $i = 1, 2, ..., n$, então:
    - (aa de $\boldsymbol{X}$) $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1', ..., \boldsymbol{X}_n')' \sim FE_k(\boldsymbol{\theta})$.
    - Se k $= 1$, $T = t(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} t(\boldsymbol{X}_i) \sim FE(\theta)$.
  - (vetor aleatório) Se $X \sim FE_k(\boldsymbol{\theta})$ e $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)'$ é uma aa de X, então $\boldsymbol{T} = (t_1(\boldsymbol{X}), t_2(\boldsymbol{X}), ..., t_k(\boldsymbol{X}))' \sim FE_k(\boldsymbol{\theta})$.

Cont.

- Outros resultados (Cont.):
  - Se $(X, Y) \sim FE_k(\boldsymbol{\theta})$ não, necessariamente, implica que as marginais pertencerão à $FE_k(\boldsymbol{\theta})$.
  - Exemplo: Seja $(X, Y) \overset{ind.}{\sim} N(0, 1)$ e defina $U = \frac{X}{Y}$ e $V = |Y|$, então pelo método do Jacobiano, temos:

$$f_{(U,V)}(u, v) = \frac{v}{2\pi} e^{-(u^2+1)\frac{v^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}\times\mathcal{R}^+}(u, v)$$

Cont.

- Defina ainda $Z = \mu + \sigma U$ e $W = \sigma V$, $\mu \in \mathcal{R}, \sigma \in \mathcal{R}^{+}$.
- Nesse caso, pode-se provar que $(Z, W) \sim FE_2(\mu, \sigma)$. Contudo,

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Ou seja, $Z \sim \text{Cauchy}(\mu, \sigma) \rightarrow Z \neq FE_2(\boldsymbol{\theta})$.

Mais resultados FE

- Se $X \sim FE(\theta)$, então:

$$\int_{\mathcal{X}} h(x) \exp\left\{c(\theta)t(x) + d(\theta)\right\} dx = 1$$

$$\rightarrow \quad e^{d(\theta)} = \left[\int_{\mathcal{X}} h(x) \exp\left\{c(\theta)t(x)\right\} dx\right]^{-1}$$

- Esse resultado também é válido se X (ou $\boldsymbol{X}$)$\sim FE_k(\boldsymbol{\theta})$, bem com para os respectivos casos discretos.

Parametrização Canônica ou Natural

- Seja $X \sim FE_k(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$, Defina $\eta_j = c_j(\boldsymbol{\theta})$, $j = 1, 2, ..., k$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, ..., \eta_k)'$ e $d_0(\boldsymbol{\eta}) = d(\boldsymbol{\eta})$, assim

$$f_X(x;\theta) = h(x) \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \eta_j t_j(x) + d_0(\boldsymbol{\eta})\right\} \mathbb{1}_A(x), A \subseteq \mathcal{R}$$

é chamada de parametrização canônica. Seja $c(\boldsymbol{\theta}) = (c_1(\boldsymbol{\theta}), ..., c_k(\boldsymbol{\theta}))'$, então

$$\Gamma = \left\{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}^K : \int_{\mathcal{X}} h(x) exp\left\{\sum_{i=1}^{k} \eta_i t_i(x)\right\} dx < +\infty\right\}$$

é chamado de espaço paramétrico natural.

Parametrização Canônica ou Natural

- Se η_j for uma transformação 1 a 1, então ($\forall$ j) $d_0(\boldsymbol{\eta}) = d_0(c^{-1}(\boldsymbol{\eta}))$ (verificar).
- Teorema: Seja $X \sim FE(\theta)$, então.
  1. fgm: $M_T(s) = \exp\left\{d_0(\eta) - d_0(s+\eta)\right\}$, $\forall s \in (-h, h)$, para algum $h > 0$.
  2. $\mathcal{E}(T) = -\frac{d}{d\eta}d_0(\eta)$ e $\mathcal{V}(T) = -\frac{d^2}{d\eta^2}d_0(\eta)$, em que $T = t(X)$.

Demonstração

- 1) Temos que ($t \equiv t(x)$):

$$
\begin{aligned}
M_T(s) &= \mathcal{E}(e^{st}) = \int_{\mathcal{X}} e^{st} h(x) e^{\eta t + d_0(\eta)} dx \\
&= e^{d_0(\eta)} \int_{\mathcal{X}} e^{st} h(x) e^{\eta t} dx \\
&= e^{d_0(\eta)} e^{-d_0(\eta+s)} \underbrace{\int_{\mathcal{X}} e^{(\eta+s)t + d_0(\eta+s)} h(x) dx}_{=1,\text{porque é a integral de uma fdp na reta}} \\
&= e^{d_0(\eta) - d_0(\eta+s)}
\end{aligned}
$$

Demonstração

- 2) Temos que:

$$\mathcal{E}(T) = \frac{d}{ds} M_T(s)\Big|_{s=0} ; \mathcal{E}(T^2) = \frac{d^2}{ds^2} M_T(s)\Big|_{s=0}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} M_T(s) &= \frac{d}{ds}\left[e^{d_0(\eta)-d_0(\eta+s)}\right] = -e^{d_0(\eta)-d_0(\eta+s)}\left[\frac{d}{ds} d_0(\eta+s)\right] \\ &= -M_T(s)\left[\frac{d}{ds} d_0(\eta+s)\right] \end{aligned}$$

Demonstração

- Agora, note que

$$\left.\frac{d}{ds}d_0(\eta+s)\right|_{s=0} = \lim_{s\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{d_0(\eta+s+h)-d_0(\eta+s)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\lim_{s\to 0}\frac{d_0(\eta+s+h)-d_0(\eta+s)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{d_0(\eta+h)-d_0(\eta)}{h} = \frac{d}{d\eta}d_0(\eta)$$

Portanto, temos que

$$M_T(0)' = \left.\frac{d}{ds}M_T(s)\right|_{s=0} = -M_T(0)\left[\frac{d}{d\eta}d_0(\eta)\right] = -\frac{d}{d\eta}d_0(\eta) = \mathcal{E}(T)$$

Demonstração

- Por outro lado, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2} M_T(s) &= \frac{d}{ds}\left[\frac{d}{ds} M_T(s)\right] = \frac{d}{ds}\left[-M_T(s)\left(\frac{d}{ds} d_0(\eta+s)\right)\right] \\
&= -\left[\frac{d}{ds} M_T(s)\left(\frac{d}{ds} d_0(\eta+s)\right) + M_T(s)\left(\frac{d^2}{ds^2} d_0(\eta+s)\right)\right] \\
&= -\left[-M_T(s)\left(\frac{d}{ds} d_0(\eta+s)\right)^2 + M_T(s)\left(\frac{d^2}{ds^2} d_0(\eta+s)\right)\right]
\end{aligned}
$$

Demonstração

- Assim

$$
\begin{aligned}
M_T(s)''|_{s=0} &= \left.\frac{d^2}{ds^2}M_T(s)\right|_{s=0} \\
&= -\left[-M_T(0)\left(\frac{d}{d\eta}d_0(\eta)\right)^2 + M_T(0)\left(\frac{d^2}{ds^2}d_0(\eta)\right)\right] \\
&= \left(\frac{d}{d\eta}d_0(\eta)\right)^2 - \frac{d^2}{d\eta^2}d_0(\eta) = \mathcal{E}(T^2)
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathcal{V}(T) = \mathcal{E}(T^2) - (\mathcal{E}(T))^2 = -\frac{d^2}{d\eta^2}d_0(\eta)$. Exercício: demonstrar que $\frac{d^2}{ds^2}d_0(\eta+s) = \frac{d^2}{d\eta^2}d_0(\eta)$.

Teorema

- Se $X \sim FE_k(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$, então:
  - 1) $M_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{s}) = \exp\left\{d_0(\boldsymbol{\eta}) - d_0(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{s})\right\}, \forall\, \boldsymbol{s}$ uma bola aberta de raio h, para alguma $h > 0$.
  - 2) $\mathcal{E}(T_j) = -\frac{\partial}{\partial \eta_j} d_0(\boldsymbol{\eta})$, $Cov(T_i, T_j) = -\frac{\partial^2}{\partial \eta_i \partial \eta_j} d_0(\boldsymbol{\eta})$, $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$, em que $\boldsymbol{T} = (t_1(X), ..., t_k(X))'$ e $\boldsymbol{s} = (s_1, .., s_k)$.
  - Prova exercício.
  - Os resultados também valem, de forma análoga, quando temos uma aa de $\boldsymbol{X}_{(n \times 1)} \sim FE(\theta)$ (ou $FE_k(\boldsymbol{\theta})$).

Exemplo (Poisson)

- Seja $X_i \overset{iid}{\sim} \text{Poisson}(\theta)$, $i = 1, 2, ..., n,$, $\theta \in \mathcal{R}^+$. Temos que

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\mathcal{N}}(x_i) = \frac{e^{-n\theta}\theta^{n\overline{x}}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\mathcal{N}}(x_i) \\
&= \mathbb{1}(\boldsymbol{x}) \left(\prod_{i=1}^{n} x_i! \right)^{-1} \exp\left\{ n\overline{x}\ln(\theta) - n\theta \right\} \\
&= h(\boldsymbol{x}) \exp\left\{ c(\theta) t(\boldsymbol{x}) + d(\theta) \right\}
\end{aligned}
$$

em que $\mathbb{1}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\mathcal{N}}(x_i)$, $A = \mathcal{N}^n$, $h(\boldsymbol{x}) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i! \right)^{-1}$, $c(\theta) = \ln(\theta)$, $t(\boldsymbol{x}) = n\overline{x}$ e $d(\theta) = -n\theta$. Dessa forma, temos que $\eta = c(\theta) = \ln(\theta) \to \theta = e^{\eta} \to d_0(\eta) = -ne^{\eta}$

Cont.

- Portanto, temos que

$$\mathcal{E}(T) = -\frac{d}{d\eta}d_0(\eta) = ne^{\eta} = n\theta$$

e

$$\mathcal{V}(T) = -\frac{d^2}{d\eta^2}d_0(\eta) = \frac{d}{d\eta}ne^{\eta} = ne^{\eta} = n\theta$$

Exemplo (Normal)

- Seja $X_i \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, i=1=2,...,n, $\sigma^2 \in \mathcal{R}^+$. Temos que

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) &= \prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}}\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x_i)\right\} \\
&= (2\pi)^{-n/2}\,{\sigma^2}^{-n/2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x_i) \\
&= \mathbb{1}(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x})e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{n}{2}\ln\sigma^2} \\
&= \exp\left\{c(\sigma^2)t(\boldsymbol{x})+d(\sigma^2)\right\}h(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

em que $h(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n/2}$, $\mathbb{1}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x_i)$, $A = \mathcal{R}^n$, $c(\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}$, $t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}x_i^2$ e $d(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)$. Dessa forma, temos que $\eta = -\frac{1}{2\sigma^2} \to \sigma^2 = -\frac{1}{2\eta} \to d_0(\eta) = -\frac{n}{2}\ln\left(-\frac{1}{2\eta}\right)$.

Exemplo (Normal)

- Dessa forma, temos que

  $\eta = -\frac{1}{2\sigma^2} \rightarrow \sigma^2 = -\frac{1}{2\eta} \rightarrow d_0(\eta) = -\frac{n}{2}\ln\left(-\frac{1}{2\eta}\right)$.

- Portanto:

$$-\frac{d}{d\eta}d_0(\eta) = \frac{n}{2}\frac{d}{d\eta}\left[-\ln(-\eta) - \ln(2)\right] = \frac{n}{2(-\eta)} = n\sigma^2 = \mathcal{E}(T)$$

$$-\frac{d^2}{d\eta^2}d_0(\eta) = \frac{n}{2\eta^2} = 2n(\sigma^2)^2 = \mathcal{V}(T)$$

- Exercício: repetir os desenvolvimentos em questão considerando $X_i \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$.

Família exponencial curvada

- Def: Se a fdp de X ($f_X(.,\boldsymbol{\theta}), \Theta \subseteq \mathcal{R}^d$, $d < k$), ($\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_d)'$), puder ser escrita como

$$f_X(x;\boldsymbol{\theta}) = h(x)\exp\left\{\sum_{j=1}^{k} c_j(\boldsymbol{\theta})t_j(x) + d(\boldsymbol{\theta})\right\}\mathbb{1}_A(x),$$

$A \subseteq \mathcal{R}$ (não depende de $\boldsymbol{\theta}$), dizemos que X pertence à família exponencial curvada d paramátrica (FEC_d).

Família exponencial curvada

- Exemplo $X \sim N(\theta, \theta^2), \theta \in \mathcal{R}$. De fato, temos que

$$
\begin{aligned}
f_X(x;\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta^2}\right\} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x) \\
&= \exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta^2} + \frac{x}{\theta} - \frac{1}{2} - \ln(\theta)\right\} (2\pi)^{-1/2} \\
&= \exp\left\{\sum_{j=1}^{2} c_j(\theta) t_j(x) + d(\theta)\right\} h(x)
\end{aligned}
$$

em que $c_1(\theta) = -\frac{1}{2\theta^2}$, $c_2(\theta) = \frac{1}{\theta}$, $t_1(x) = x^2$, $t_2(x) = x$, $d(\theta) = -\left(\ln(\theta) + \frac{1}{2}\right)$ e $h(x) = (2\pi)^{-1/2}\mathbb{1}_R(x)$.

Família exponencial curvada

- Observação 1: Se $X_i \overset{iid}{\sim} FEC_d(\boldsymbol{\theta})$, i=1,2,...,n (família exponencial curvada d paramétrica), então $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)' \sim FEC_d(\boldsymbol{\theta})$.
- Observação 2: Se d = k temos a família exponencial completa $(FE_k(\boldsymbol{\theta}))$, vista anteriormente.
- Demonstrações das observações 1 e 2 (exercício).
- Em nosso exemplo, temos o gráfico a seguir:

Espaço paramétrico ($N(\theta, \theta^2)$)