

Família exponencial

Prof. Caio Azevedo

Introdução

- Há basicamente três aspectos inferenciais relativos ao parâmetro (θ)
 - Estimação pontual: produzir uma estimativa pontual (número) para θ , a mais acurada possível.
 - Estimação intervalar: produzir uma estimativa intervalar (intervalo numérico) para θ , a mais acurada possível. Pode ser estendido para intervalos de confiança simultâneos e regiões de confiança.
 - Teste de hipótese: propor um mecanismo de decisão, para escolher uma entre duas hipóteses, da forma mais acurada possível. Pode ser estendido para três ou mais hipóteses no total, escolhendo-se pelo menos duas.

Famílias especiais de distribuições de probabilidade

- Existem várias famílias de distribuições de probabilidade que apresentam diversas propriedades de interesse.
- Algumas dessas propriedades (de algumas dessas famílias) permitem encontrar resultados (sub-)ótimos, em relação aos elementos de Inferências Estatística.
- Exemplos de famílias especiais: família exponencial, família de distribuições elípticas, família de localização-escala, família de mistura de escala, família de mistura de localização-escala, família Tweedie, família de modelos exponenciais de dispersão entre outras.

Famílias especiais de distribuições de probabilidade

- Nos focaremos nas seguintes famílias:
 - Família exponencial (FE).
 - Família de localização (FL).
 - Família de escala (FE).
 - Família de localização-escala (FLE).

Família exponencial

- A FE é de extrema importância no estudo dos modelos (de regressão) lineares generalizados (http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/Material_MLG_1S_2016.htm).
- Congrega tanto distribuições discretas quanto contínuas.
- Apresenta diversas propriedades que facilitam/permitem a demonstração/obtenção de resultados inferenciais (muito) importantes.

Família exponencial

- Dizemos que a distribuição de uma va X pertence à família exponencial k -paramétrica (notação: $X \sim FE_k(\boldsymbol{\theta})$) se sua fdp é da forma:

$$f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = h(x) \exp \left\{ \sum_{j=1}^k c_j(\boldsymbol{\theta}) t_j(x) + d(\boldsymbol{\theta}) \right\} \mathbb{1}_A(x)$$

em que $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_k)' \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$, $h: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^+$ (não depende de $\boldsymbol{\theta}$), $c_j: \mathcal{R}^k \rightarrow \mathcal{R}$ (não depende de x), $t_j: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ (não depende de $\boldsymbol{\theta}$), $d: \mathcal{R}^k \rightarrow \mathcal{R}$, não depende de x , $j = 1, 2, \dots, k$, $A \in \mathcal{R}$ (não depende de $\boldsymbol{\theta}$).

Família exponencial

- Caso particular de grande importância: família exponencial bi-paramétrica (http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/Aula_FE_MLG_1S_2016.pdf)

- Formas alternativas:

- $f_X(x; \theta) = h(x)a(\theta) \exp \left\{ \sum_{j=1}^k c_j(\theta)t_j(x) \right\} \mathbb{1}_A(x),$
 $a(\theta) = \exp\{d(\theta)\}.$

- $f_X(x; \theta) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^k c_j(\theta)t_j(x) + d(\theta) + g(x) \right\} \mathbb{1}_A(x),$
 $g(x) = \exp \{ \ln h(X) \}.$

- $f_X(x; \theta) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^k c_j(\theta)t_j(x) + g(x) \right\} a(\theta) \mathbb{1}_A(x),$
 $a(\theta) = \exp\{d(\theta)\}$ e $g(x) = \exp \{ \ln h(X) \}.$

Exemplo 1: Bernoulli $(\theta), \theta \in (0, 1)$

- Temos que:

$$\begin{aligned}f_X(x; \theta) &= \theta^x(1 - \theta)^{1-x} \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x) \\&= \exp \{x \ln \theta - x \ln(1 - \theta) + \ln(1 - \theta)\} \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x) \\&= \exp \left\{ x \ln \left(\frac{\theta}{1 - \theta} \right) + \ln(1 - \theta) \right\} \mathbb{1}_{\{0,1\}}(x) \\&= h(x) \exp \{c(\theta)t(x) + d(\theta)\} \mathbb{1}_A(x)\end{aligned}$$

em que $c(\theta) = \ln \left(\frac{\theta}{1 - \theta} \right)$, $t(x) = x$, $d(\theta) = \ln(1 - \theta)$, $h(x) = 1$ e $A = \{0, 1\}$. Assim, $X \sim FE(\theta)$.

Exemplo 2: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

- Temos que $((\mu, \sigma^2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^+$ desconhecidos, $\theta = (\mu, \sigma^2)$) e:

$$\begin{aligned}f_X(x; \theta) &= \exp \left\{ \frac{-(x^2 - 2x\mu + \mu^2)}{2\sigma^2} \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x) \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x) \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{x\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \ln \sigma \right\} \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x) \exp \left\{ -\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{x\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \ln \sigma \right\} \\&= h(x) \exp \left\{ \sum_{j=1}^2 c_j(\theta) t_j(x) + d(\theta) \right\} \mathbb{1}_A(x)\end{aligned}$$

em que $c_1(\theta) = -\frac{1}{2\sigma^2}$, $c_2(\theta) = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $t_1(x) = x^2$, $t_2(x) = x$,

$d(\theta) = -\frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \ln \sigma$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x)$ e $A = \mathcal{R}$. Assim, $X \sim FE_2(\theta)$.



Outros exemplos

- Outras distribuições que pertencem à família exponencial.
 - binomial(n, θ), $n \in \mathcal{N}^+$ (conhecido) e $\theta \in (0, 1)$.
 - Poisson(θ), $\theta \in \mathcal{R}^+$.
 - gama(r, θ), $(r, \theta) \in \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^+$.
 - geométrica(θ), $\theta \in (0, 1)$.
 - beta(a, b), $(a, b) \in \mathcal{R}^+ \times \mathcal{R}^+$.
 - multinomial $_p(n, \boldsymbol{\theta})$, $n \in \mathcal{N}$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p-1})$,
 $\theta_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, p - 1$, $\sum_{j=1}^{p-1} \theta_j \in (0, 1)$, veja mais http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/aula_DPD_ADD_1S_2017.pdf.
 - $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{R}^p$, $\boldsymbol{\Sigma}$: positiva definida, veja mais http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/aula_DNM_Ana_Multi_2S_2017.pdf.

Exemplos de distribuições que não pertencem à FE

- Distribuições cujo suporte (conjunto A) depende de θ .
 - $U(0, \theta)$, $\theta \in \mathcal{R}^+$.
 - $f_X(x; \theta) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}_{(\theta, \infty)}(x)$, $\theta \in \mathcal{R}^+$.
- Cauchy(μ, σ^2), $\mu \in \mathcal{R}$ e $\sigma^2 \in \mathcal{R}^+$,

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{\pi\sigma} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x).$$

- Exercício: apresentar, pelo menos, três (outras) distribuições que não pertençam à família exponencial.

- Resultado: Seja X_1, \dots, X_n uma aa de $X \sim FE_k(\theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathcal{R}^k$.

Então a distribuição de $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ pertence à $FE_k(\theta)$.

- Demonstração:

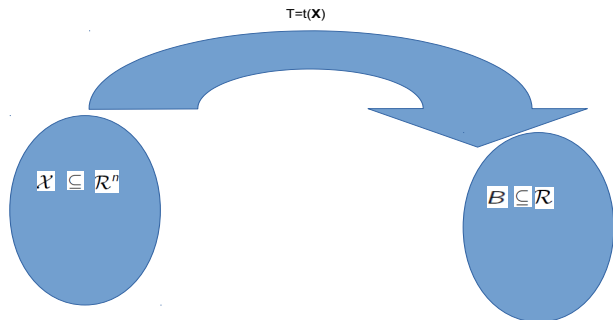
$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta) &\stackrel{iid}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n \left\{ h(x_i) \exp \left\{ \sum_{j=1}^k c_j(\theta) t_j(x_i) + d(\theta) \right\} \mathbb{1}_A(x_i) \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n h(x_i) \exp \left\{ \sum_{j=1}^k c_j(\theta) \sum_{i=1}^n t_j(x_i) + nd(\theta) \right\} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_A(x_i) \\ &= h^*(\mathbf{x}) \exp \left\{ \sum_{j=1}^k c_j(\theta) t_j^*(\mathbf{x}) + d^*(\theta) \right\} \mathbb{1}_{A^*}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Teorema

- Dessa forma $\mathbf{X} \sim FE_k(\boldsymbol{\theta})$ (se cada x_i pertence à FE então, a distribuição conjunta também pertence à FE).
- Seja X_1, \dots, X_n uma aa de $X \sim FE(\theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathcal{R}$. Então a distribuição de $T = t(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n t(X_i)$ também pertence à $FE(\theta)$.
- Do resultado anterior, note que, se $K=1$, então:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta) = h(\mathbf{x}) \exp \{c(\theta)t(\mathbf{x}) + nd(\theta)\} \mathbb{1}_A(\mathbf{x})$$

Transformação (Teorema): Caso discreto



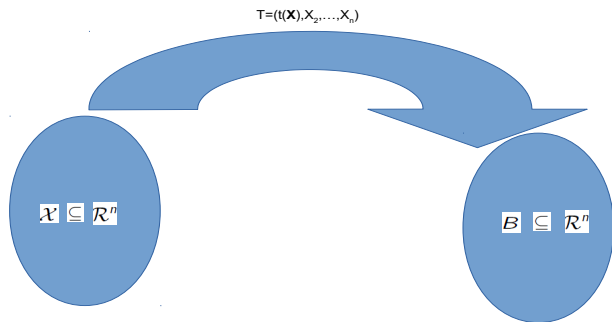
Teorema

- Demonstração: 1) Caso discreto.

$$\begin{aligned}f_T(t; \theta) &= P_\theta(T = t) = \sum_{\mathbf{x}:t(\mathbf{x})=t} P_\theta(\mathbf{X} = \mathbf{x}) \\&= \sum_{\mathbf{x}:t(\mathbf{x})=t} h(\mathbf{x}) \exp \{c(\theta)t(\mathbf{x}) + d(\theta)\} \mathbb{1}_A(\mathbf{x}) \\&= \sum_{\mathbf{x}:t(\mathbf{x})=t} h(\mathbf{x}) \exp \{c(\theta)t + d(\theta)\} \mathbb{1}_B(t) \\&= \exp \{c(\theta)t + d(\theta)\} \mathbb{1}_B(t) \sum_{\mathbf{x}:t(\mathbf{x})=t} h(\mathbf{x}) \\&= g(t) \exp \{c(\theta)t + d(\theta)\} \mathbb{1}_B(t)\end{aligned}$$

Assim $T \sim FE(\theta)$.

Transformação (Teorema): Caso contínuo



Teorema

- Demonstração: 2) Caso contínuo.
- Utilizaremos o método do Jacobiano. Suporemos que a transformação t é 1 a 1, ou seja, $T_i = t(X_i) \leftrightarrow X_i = t^{-1}(T_i)$.
- Para usar o método do Jacobiano, vamos definir as seguintes transformações:

$$Y_1 = T = \sum_{i=1}^n t(X_i) = t(X_1) + \sum_{i=2}^n t(X_i)$$
$$Y_j = X_j, j = 2, 3, \dots, n$$

Teorema

- Dessa forma, como a transformação é 1 a 1, as transformações inversas são dadas por

$$X_j = Y_j, j = 2, 3, \dots, n$$
$$t(X_1) = Y_1 - \sum_{i=2}^n t(Y_i) \rightarrow X_1 = t^{-1}\left(Y_1 - \underbrace{\sum_{i=2}^n t(Y_i)}_W\right) = t^{-1}(W)$$

Teorema

- Por outro lado, temos que o Jacobiano é dado por:

$$J = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

Teorema

- Em que

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_i} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \in \{2, \dots, n\} \\ 0, & \text{se } i \neq j \in \{2, \dots, n\} \end{cases}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_j} = \begin{cases} \frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial w}, & \text{se } j = 1 \\ -\frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial w} \frac{\partial t(y_j)}{\partial y_j}, & \text{se } j \in \{2, \dots, n\} \end{cases}$$

Teorema

- Dessa forma:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{Ax}}{\partial \mathbf{x}}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial w} & -\frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial y_2} \frac{\partial t(w)}{\partial y_2} & -\frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial y_3} \frac{\partial t(w)}{\partial y_3} & \dots & -\frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial y_n} \frac{\partial t(w)}{\partial y_n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $|\mathbf{J}| = \left| \frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial w} \right|$.

Teorema

- Logo:

$$\begin{aligned}f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \theta) &= |\mathbf{J}| f_{\mathbf{X}}(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y}); \theta) \mathbb{1}_B(\mathbf{y}) \\&= \left| \frac{\partial \mathbf{t}^{-1}(w)}{\partial w} \right| \cdot h(\mathbf{x}) \exp \{c(\theta) t(\mathbf{x}) + d(\theta)\} \mathbb{1}_B(\mathbf{y}) \\&= \left| \frac{\partial \mathbf{t}^{-1}(w)}{\partial w} \right| \cdot [h(\mathbf{t}^{-1}(w)) \prod_{i=2}^n h(y_i)] \\&\times \exp \left\{ c(\theta) y_1 + c(\theta) \sum_{i=2}^n t(y_i) + d(\theta) \right\} \mathbb{1}_B(\mathbf{y})\end{aligned}$$

Teorema

- Assim, temos que:

$$\begin{aligned}f_{Y_1}(y_1; \theta) &= \int \dots \int f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \theta) dy_2 \dots dy_n \\&= \exp \{c(\theta)y_1 + d(\theta)\} \mathbb{1}_c(y_1) \\&\times \left[\int \dots \int \left| \frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial w} \right| [h(t^{-1}(w)) \prod_{i=2}^n h(y_i)] \right. \\&\times \left. \exp \left\{ c(\theta) \sum_{i=2}^n t(y_i) \right\} dy_2 \dots dy_n \right] \\&\rightarrow f_{Y_1}(y_1; \theta) = f_T(t; \theta) = h(t) \exp \{c(\theta)t + d(\theta)\} \mathbb{1}_c(t)\end{aligned}$$

Teorema

- Em que

$$h(y_1) = h(t) = \int \dots \int \left| \frac{\partial t^{-1}(w)}{\partial y_1} \right| [h(t^{-1}(w)) \prod_{i=2}^n h(y_i)] \\ \times \exp \left\{ c(\theta) \sum_{i=2}^n t(y_i) \right\} dy_2 \dots dy_n.$$

Portanto, $T \sim FE(\theta)$.

Cont.

- OBS: Se a transformação não for 1 a 1, o resultado ainda vale. Basta dividir \mathcal{X} em tantas regiões quantas forem necessárias de modo a se obter transformações 1 a 1, em cada uma delas.
- Outros resultados:
 - (vetor aleatório) Se $\mathbf{X}_i = (X_1, \dots, X_p)' \sim FE_k(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$, $i = 1, 2, \dots, n$, então:
 - (aa de \mathbf{X}) $\mathbf{X} = (\mathbf{X}'_1, \dots, \mathbf{X}'_n)' \sim FE_k(\boldsymbol{\theta})$.
 - Se $k = 1$, $T = t(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n t(\mathbf{X}_i) \sim FE(\theta)$.
 - (vetor aleatório) Se $X \sim FE_k(\boldsymbol{\theta})$ e $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ é uma aa de X , então $\mathbf{T} = (t_1(\mathbf{X}), t_2(\mathbf{X}), \dots, t_k(\mathbf{X}))' \sim FE_k(\boldsymbol{\theta})$.

- Outros resultados (Cont.):
 - Se $(X, Y) \sim FE_k(\theta)$ não, necessariamente, implica que as marginais pertencerão à $FE_k(\theta)$.
 - Exemplo: Seja $(X, Y) \stackrel{ind.}{\sim} N(0, 1)$ e defina $U = \frac{X}{Y}$ e $V = |Y|$, então pelo método do Jacobiano, temos:

$$f_{(U,V)}(u, v) = \frac{v}{2\pi} e^{-(u^2+1)\frac{v^2}{2}} \mathbf{1}_{\mathcal{R} \times \mathcal{R}_+}(u, v)$$

Cont.

- Defina ainda $Z = \mu + \sigma U$ e $W = \sigma V$, $\mu \in \mathcal{R}$, $\sigma \in \mathcal{R}^+$. Temos que
- Nesse caso, pode-se provar que $(Z, W) \sim FE_2(\mu, \sigma)$. Contudo,

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Ou seja, $Z \sim \text{Cauchy}(\mu, \sigma) \rightarrow Z \neq FE_2(\theta)$.

Mais resultados FE

- Se $X \sim FE(\theta)$, então:

$$\int_{\mathcal{X}} h(x) \exp \{c(\theta)t(x) + d(\theta)\} dx = 1$$
$$\rightarrow e^{d(\theta)} = \left[\int_{\mathcal{X}} h(x) \exp \{c(\theta)t(x)\} dx \right]^{-1}$$

- Esse resultado também é válido se X (ou \mathbf{X}) $\sim FE_k(\theta)$, bem com para os respectivos casos discretos.

Parametrização Canônica ou Natural

- Seja $X \sim FE_k(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$, Defina $\eta_j = c_j(\boldsymbol{\theta})$, $j = 1, 2, \dots, k$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_k)'$ e $d_0(\boldsymbol{\eta}) = d(\boldsymbol{\eta})$, assim

$$f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = h(x) \exp \left\{ \sum_{j=1}^k \eta_j t_j(x) + d_0(\boldsymbol{\eta}) \right\} \mathbb{1}_A(x), A \subseteq \mathcal{R}$$

é chamada de parametrização canônica. Seja

$c(\boldsymbol{\theta}) = (c_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, c_k(\boldsymbol{\theta}))'$, então

$$\Gamma = \left\{ \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}^K : \int_{\mathcal{X}} h(x) \exp \left\{ \sum_{i=1}^k \eta_i t_i(x) \right\} dx < +\infty \right\}$$

é chamado de espaço paramétrico natural.

Parametrização Canônica ou Natural

- Se η_j for uma transformação 1 a 1, então $(\forall j) d_0(\eta) = d_0(c^{-1}(\eta))$ (verificar).
- Teorema: Seja $X \sim FE(\theta)$, então.
 - fgm: $M_T(s) = \exp \{d_0(\eta) - d_0(s + \eta)\}$, $\forall s \in (-h, h)$, para algum $h > 0$.
 - $\mathcal{E}(T) = -\frac{d}{d\eta} d_0(\eta)$ e $\mathcal{V}(T) = -\frac{d^2}{d\eta^2} d_0(\eta)$, em que $T = t(X)$.

Demonstração

- 1) Temos que ($t \equiv t(x)$):

$$\begin{aligned}M_T(s) &= \mathcal{E}(e^{st}) = \int_{\mathcal{X}} e^{st} h(x) e^{\eta t + d_0(\eta)} dx \\ &= e^{d_0(\eta)} \int_{\mathcal{X}} e^{st} h(x) e^{\eta t} dx \\ &= e^{d_0(\eta)} e^{-d_0(\eta+s)} \underbrace{\int_{\mathcal{X}} e^{(\eta+s)t + d_0(\eta+s)} h(x) dx}_{=1, \text{ porque é a integral de uma fdp na reta}} \\ &= e^{d_0(\eta) - d_0(\eta+s)}\end{aligned}$$

Demonstração

- 2) Temos que:

$$\mathcal{E}(T) = \left. \frac{d}{ds} M_T(s) \right|_{s=0}; \mathcal{E}(T^2) = \left. \frac{d^2}{ds^2} M_T(s) \right|_{s=0}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} M_T(s) &= \frac{d}{ds} \left[e^{d_0(\eta) - d_0(\eta+s)} \right] = -e^{d_0(\eta) - d_0(\eta+s)} \left[\frac{d}{ds} d_0(\eta + s) \right] \\ &= -M_T(s) \left[\frac{d}{ds} d_0(\eta + s) \right] \end{aligned}$$

Demonstração

- Agora, note que

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{ds} d_0(\eta + s) \right|_{s=0} &= \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d_0(\eta + s + h) - d_0(\eta + s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d_0(\eta + s + h) - d_0(\eta + s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d_0(\eta + h) - d_0(\eta)}{h} = \frac{d}{d\eta} d_0(\eta)\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$M_T(0)' = \left. \frac{d}{ds} M_T(s) \right|_{s=0} = -M_T(0) \left[\frac{d}{d\eta} d_0(\eta) \right] = -\frac{d}{d\eta} d_0(\eta) = \mathcal{E}(T)$$

Demonstração

- Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{ds^2} M_T(s) &= \frac{d}{ds} \left[\frac{d}{ds} M_T(s) \right] = \frac{d}{ds} \left[-M_T(s) \left(\frac{d}{ds} d_0(\eta + s) \right) \right] \\ &= - \left[\frac{d}{ds} M_T(s) \left(\frac{d}{ds} d_0(\eta + s) \right) + M_T(s) \left(\frac{d^2}{ds^2} d_0(\eta + s) \right) \right] \\ &= - \left[-M_T(s) \left(\frac{d}{ds} d_0(\eta + s) \right)^2 + M_T(s) \left(\frac{d^2}{ds^2} d_0(\eta + s) \right) \right]\end{aligned}$$

Demonstração

- Assim

$$\begin{aligned}M_T(s)''|_{s=0} &= \left. \frac{d^2}{ds^2} M_T(s) \right|_{s=0} \\&= - \left[-M_T(0) \left(\frac{d}{d\eta} d_0(\eta) \right)^2 + M_T(0) \left(\frac{d^2}{ds^2} d_0(\eta) \right) \right] \\&= \left(\frac{d}{d\eta} d_0(\eta) \right)^2 - \frac{d^2}{d\eta^2} d_0(\eta) = \mathcal{E}(T^2)\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{V}(T) = \mathcal{E}(T^2) - (\mathcal{E}(T))^2 = -\frac{d^2}{d\eta^2} d_0(\eta)$. Exercício: demonstrar que $\frac{d^2}{ds^2} d_0(\eta + s) = \frac{d^2}{d\eta^2} d_0(\eta)$.

Teorema

- Se $X \sim FE_k(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathcal{R}^k$, então:
 - 1) $M_{\mathbf{T}}(\mathbf{s}) = \exp\{d_0(\boldsymbol{\eta}) - d_0(\boldsymbol{\eta} + \mathbf{s})\}$, $\forall \mathbf{s}$ uma bola aberta de raio h , para alguma $h > 0$.
 - 2) $\mathcal{E}(T_j) = -\frac{\partial}{\partial \eta_j} d_0(\boldsymbol{\eta})$, $\text{Cov}(T_i, T_j) = -\frac{\partial^2}{\partial \eta_i \partial \eta_j} d_0(\boldsymbol{\eta})$,
 $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, em que $\mathbf{T} = (t_1(X), \dots, t_k(X))'$ e $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$.
 - Prova exercício.
 - Os resultados também valem, de forma análoga, quando temos uma aa de $X \sim FE(\theta)$ (ou $FE_k(\boldsymbol{\theta})$).

Exemplo (Poisson)

- Seja $X_i \stackrel{iid}{\sim} \text{Poisson}(\theta)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\theta \in \mathcal{R}^+$. Temos que

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\theta} \theta^{x_i}}{x_i!} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\mathcal{N}}(x_i) = \frac{e^{-n\theta} \theta^{n\bar{x}}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\mathcal{N}}(x_i) \\ &= \mathbb{1}(\mathbf{x}) \left(\prod_{i=1}^n x_i! \right)^{-1} \exp \{ n\bar{x} \ln(\theta) - n\theta \} \\ &= h(\mathbf{x}) \exp \{ c(\theta) t(\mathbf{x}) + d(\theta) \} \end{aligned}$$

em que $\mathbb{1}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\mathcal{N}}(x_i)$, $A = \mathcal{N}^n$, $h(\mathbf{x}) = \left(\prod_{i=1}^n x_i! \right)^{-1}$,
 $c(\theta) = \ln(\theta)$, $t(\mathbf{x}) = n\bar{x}$ e $d(\theta) = -n\theta$. Dessa forma, temos que
 $\eta = c(\theta) = \ln(\theta) \rightarrow \theta = e^\eta \rightarrow d_0(\eta) = -ne^\eta$

Cont.

- Portanto, temos que

$$\mathcal{E}(T) = -\frac{d}{d\eta} d_0(\eta) = ne^\eta = n\theta$$

e

$$\mathcal{V}(T) = -\frac{d^2}{d\eta^2} d_0(\eta) = \frac{d}{d\eta} ne^\eta = ne^\eta = n\theta$$

Exemplo (Normal)

- Seja $X_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, $i=1,2,\dots,n$, $\sigma^2 \in \mathcal{R}^+$. Temos que

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \theta) &= \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x_i) \right\} \\ &= (2\pi)^{-n/2} \sigma^{2-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x_i) = h(\mathbf{x}) e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n}{2} \ln \sigma^2} \\ &= \exp \{ c(\sigma^2) t(\mathbf{x}) + d(\sigma^2) \} h(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

em que $h(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2}$, $\mathbb{1}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\mathcal{R}}(x_i)$, $A = \mathcal{R}^n$, $c(\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}$, $t(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ e $d(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(\sigma^2)$.

Dessa forma, temos que $\eta = -\frac{1}{\sigma^2} \rightarrow \sigma^2 = -\frac{1}{2\eta} \rightarrow d_0(\eta) = -\frac{n}{2} \ln \left(-\frac{1}{2\eta} \right)$.

Exemplo (Normal)

- Dessa forma, temos que

$$\eta = -\frac{1}{\sigma^2} \rightarrow \sigma^2 = -\frac{1}{2\eta} \rightarrow d_0(\eta) = -\frac{n}{2} \ln\left(-\frac{1}{2\eta}\right).$$

- Portanto:

$$-\frac{d}{d\eta} d_0(\eta) = \frac{n}{2} \frac{d}{d\eta} [-\ln(-\eta) - \ln(2)] = \frac{n}{2\eta} = n\sigma^2 = \mathcal{E}(T)$$

$$-\frac{d^2}{d\eta^2} d_0(\eta) = \frac{n}{2\eta^2} = 2n(\sigma^2)^2 = \mathcal{V}(T)$$

- Exercício: repetir os desenvolvimentos em questão considerando

$$X_i \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2).$$

Família exponencial curvada

- Def: Se a fdp de X ($f_X(\cdot, \boldsymbol{\theta})$), $\Theta \subseteq \mathcal{R}^d$, $d < k$, ($\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_d)'$), puder ser escrita como

$$f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = h(\mathbf{x}) \exp \left\{ \sum_{j=1}^k c_j(\boldsymbol{\theta}) t_j(x) + d(\boldsymbol{\theta}) \right\} \mathbb{1}_A(x),$$

$A \subseteq \mathcal{R}$ (não depende de $\boldsymbol{\theta}$), dizemos que X pertence à família exponencial curvada d paramétrica (FEC_d).

Família exponencial curvada

- Exemplo $X \sim N(\theta, \theta^2)$, $\theta \in \mathcal{R}$.

De fato, temos que

$$\begin{aligned}f_X(x; \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta^2}\right\} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(x) \\&= \exp\left\{-\frac{x^2}{2\theta^2} + \frac{x}{\theta} - \frac{1}{2} - \ln(\theta)\right\} (2\pi)^{-1/2} \\&= \exp\left\{\sum_{j=1}^2 c_j(\theta) t_j(x) + d(\theta)\right\} h(x)\end{aligned}$$

em que $c_1(\theta) = -\frac{1}{2\theta^2}$, $c_2(\theta) = \frac{1}{\theta}$, $t_1(x) = x^2$, $t_2(x) = x$,
 $d(\theta) = -(\ln(\theta) + \frac{1}{2})$ e $h(x) = (2\pi)^{-1/2} \mathbf{1}_{\mathcal{R}}(x)$.

Família exponencial curvada

- Observação 1: Se $X_i \in FEC_d(\theta)$ (família exponencial curvada d paramétrica).
- Observação 2: Se $d = k$ temos a família exponencial completa ($FE_k(\theta)$), vista anteriormente.
- Em nosso exemplo, temos o gráfico a seguir:

Espaço paramétrico ($N(\theta, \theta^2)$)

