Família de prioris conjugadas e use sequencial do teorema de Bayes

Prof. Caio Azevedo

Família Conjugada

- Sejam
  - $F = \{p(\mathbf{x}|\theta); \forall\ \theta\ \in \Theta\}$, uma família de modelos estatísticos (verossimilhança).
  - $p^* = \{p(\theta|\boldsymbol{\eta}) \equiv p(\theta.); \forall\ \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{B}\}$, uma família de prioris, em que $\boldsymbol{\eta}$ são os hiperparâmetros associados.
- Dizemos que a família p^* é cojugada à família F, se $\forall p(\mathbf{x}|\theta) \in F$ e $p(\theta) \in p^* \rightarrow p(\theta|\mathbf{x}) \in p^*$.
- Na prática, em geral, identificar a verossimilhança em θ como sendo correspondento ao núcleo de alguma família de distribuições (em geral essa família é chamada de conjugada natural).

Família Conjugada na família exponencial

- Dizemos que uma variável aleatória $X|\boldsymbol{\theta}$ pertence à família exponencial (k paramétrica) se sua distribuição puder ser escrita como

$$p(x|\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} c_j(\boldsymbol{\theta})t_j(x) + d(\boldsymbol{\theta})\right\} a(x)\mathbb{1}_A(x)$$

em que A não depende de θ.

- Seja $X_i|\boldsymbol{\theta} \overset{i.i.d}{\sim} X|\boldsymbol{\theta}, i = 1, ..., n$, então

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} c_j(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{n} t_j(x_i) + nd(\boldsymbol{\theta})\right\} \prod_{i=1}^{n} a(x_i)\mathbb{1}_A(\mathbf{x})$$

Família Conjugada na família exponencial (cont.)

- Neste caso, a família conjugada de prioris é dada por

$$p(\theta) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} c_j(\boldsymbol{\theta})\alpha_j + \beta d(\boldsymbol{\theta})\right\} k(\beta, \boldsymbol{\alpha})\mathbb{1}_{\Theta}(\boldsymbol{\theta})$$

- Consquentemente, a posteriori será dada por (exercício):

$$\begin{aligned} p(\theta|\mathbf{x}) &= \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} c_j(\boldsymbol{\theta})\left[\alpha_j + \sum_{i=1}^{n} t_j(x_i)\right] + (\beta + n)d(\boldsymbol{\theta})\right\} \times \\ &\times \quad k(\beta + n, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{t})\mathbb{1}_{\Theta}(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

Uso sequecial do teorema de Bayes

- Sejam $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ e $\mathbf{x}' = (x_1, ..., x_m)$ amostras de $X|\theta$, tomadas sequencialmente e defina $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}, \mathbf{x}')$.
- Dessa forma, temos que

$$p(\theta|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})p(\theta)}{p(\mathbf{x})}, p(\mathbf{x}) = \int_{\Theta} p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})p(\theta)d\theta$$

- Por outro lado, temos que

$$p(\theta|\mathbf{x}^*) = \frac{p(\mathbf{x}^*|\boldsymbol{\theta})p(\theta)}{p(\mathbf{x}^*)}, p(\mathbf{x}^*) = \int_{\Theta} p(\mathbf{x}^*|\boldsymbol{\theta})p(\theta)d\theta$$

Uso sequecial do teorema de Bayes (cont.)

- Agora, note que $p(\mathbf{x}^*|\theta) = p((\mathbf{x},\mathbf{x}')|\theta) = p(\mathbf{x}'|\theta,\mathbf{x})p(\mathbf{x}|\theta)$. Logo, vem que

$$
\begin{aligned}
p(\theta|\mathbf{x}^*) &= \frac{p(\mathbf{x}'|\theta,\mathbf{x})p(\mathbf{x}|\theta)p(\theta)}{p(\mathbf{x}^*)} = \frac{p(\mathbf{x}'|\theta,\mathbf{x})}{\frac{p(\mathbf{x}^*)}{p(\mathbf{x})}}\frac{p(\mathbf{x}|\theta)p(\theta)}{p(\mathbf{x})} \\
&= \frac{p(\mathbf{x}'|\theta,\mathbf{x})}{\int_\Theta p(\mathbf{x}'|\theta,\mathbf{x})\frac{p(\mathbf{x}|\theta)p(\theta)}{p(\mathbf{x})}d\theta}p(\theta|\mathbf{x}) \\
&= \frac{p(\mathbf{x}'|\theta,\mathbf{x})}{\int_\Theta p(\mathbf{x}'|\theta,\mathbf{x})p(\theta|\mathbf{x})d\theta}p(\theta|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}'|\theta,\mathbf{x})p(\theta|\mathbf{x})}{p(\mathbf{x}')}
\end{aligned}
$$