Exercícios

Prof. Caio Azevedo

Normal inversa

- Seja $X_1, ..., X_n \overset{iid}{\sim} X$, $X \sim NI(\mu, \lambda)$, $\theta = (\mu, \lambda)'$, $\mu, \lambda > 0$.
- Densidade

$$f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

- Verossimilhança

$$L(\boldsymbol{\theta}) \propto \lambda^{n/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\mu^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}\right\}$$

- $\mathcal{E}(X) = \mu$, $\mathcal{V}(X) = \frac{\mu^3}{\lambda}$, $\mathcal{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}$, $\mathcal{V}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\mu\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}$.

Normal inversa (λ conhecido)

- Família exponencial

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\mu) &= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n/2}\prod_{i=1}^{n} x_i^{-3}\exp\left\{-\frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}\right\}\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}) \\
&= \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\lambda}{\mu}-\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right\}\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}) \\
&= \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\lambda}{\mu}\right\}\exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right\}\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}) \\
&= \exp\left\{c(\mu)t(\boldsymbol{x})+d(\mu)\right\}h(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

em que $c(\mu)=-\frac{\lambda}{2\mu^2}$, $t(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i$, $d(\mu)=\frac{n\lambda}{\mu}$,
$h(\boldsymbol{x})=\exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right\}\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x})$, $\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x})=\prod_{i=1}^{n}I_{(0,\infty)^n}(x_i)$.

Normal inversa (λ conhecido)

- Logo $\boldsymbol{X} \sim FE_1(\mu)$ e $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma estatística sufciente.
- Por outro lado, temos que:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\mu) \quad = \quad \exp\left\{\eta t(\boldsymbol{x}) + d_0(\eta)\right\} h(\boldsymbol{x})$$

em que $\eta = -\frac{\lambda}{2\mu^2} \rightarrow \mu = \sqrt{-\frac{\lambda}{2\eta}}$ e $d_0(\eta) = n\sqrt{\frac{-2\eta}{\lambda}}$. Como $\Theta_\eta = (-\infty, 0)$ contem algum segmento de reta, então T também é minimal e completa.

- Obs: $-d_0'(\eta) = n\sqrt{\lambda}(-2\eta)^{-1/2}\frac{2}{2} \rightarrow \mathcal{E}(T) = n\mu$,
$-d_0''(\eta) = n\sqrt{\lambda}(-2\eta)^{-3/2} = n\lambda^{1/2}\left(\frac{\lambda}{\mu^2}\right)^{-3/2} \rightarrow \mathcal{V}(T) = \frac{n\mu^3}{\lambda}$

Normal inversa (λ conhecido)

- ENVUM, $\mathcal{E}(T) = n\mu \to \mathcal{E}\left(\frac{T}{n}\right) = \mu$. Logo $T^* = \frac{T}{n}$ é o ENVUM de μ, pelo TLS.
- EMM: Como $\mathcal{E}(X) = \mu$, então $\widehat{\mu}_{MM} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ é o EMM de μ.
  - Temos que $\mathcal{E}(\widehat{\mu}_{MM}) = \mu$ e $\mathcal{V}(\widehat{\mu}_{MM}) = \frac{\mu^3}{\lambda n}$
- EMV: Temos que:

$$l(\mu) = -\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\mu^2 x_i} + \text{const.}$$

Normal inversa (λ conhecido)

- EMV: Temos que:

$$
\begin{aligned}
S(\mu) = \frac{\partial l(\mu)}{\partial \mu} &= -\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{-2(x_i-\mu)\mu^2 - 2(x_i-\mu)^2\mu}{\mu^4 x_i} \\
&= \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{2x_i\mu^2 - 2\mu^3 + 2xi^2\mu - 4x_i\mu^2 + 2\mu^3}{\mu^4 x_i} \\
&= \lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\mu}{\mu^3} \\
H(\mu) &= \lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{-\mu^3 - 3(x_i-\mu)\mu^2}{\mu^6} = \lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{2\mu^3 - 3x_i\mu^2}{\mu^6}
\end{aligned}
$$

Normal inversa (λ conhecido)

- EMV: Temos que:

$$
\begin{aligned}
I(\mu) &= \frac{n\lambda}{\mu^3} \\
S(\widetilde{\mu}) &= 0 \rightarrow \widetilde{\mu} = \overline{x} \\
H(\widetilde{\mu}) &= -\frac{n\lambda}{\overline{x}^3} < 0
\end{aligned}
$$

- Logo $\widehat{\theta}_{MV} = \overline{X}$ é o emv de θ, (nesse caso $\widehat{\theta}_{MV} = \widehat{\theta}_{MM}$). Além disso, eles coincidem com o ENVUM.
- Note que $LICR(\theta) = \frac{\mu^3}{n\lambda} = \mathcal{V}(T^*) = \mathcal{V}(\overline{X})$.

Normal inversa (λ conhecido)

- Por outro lado, temos que:

$$S(\mu) = \frac{\lambda}{\mu^3}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right) = a(\mu)\left[t(\boldsymbol{x}) - \tau(\mu)\right]$$

- Assim, como $\boldsymbol{X} \in FE_1$, as condições de regularidade são válidas e, portanto temos que $T^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ é o ENVUM de μ.

Normal inversa (λ conhecido)

- Intervalos de confiança.
- A fda de X não possui forma fechada, assim, usar o resultado $W = -2\sum_{i=1}^{n} \ln F_X(X_i;\mu)$ não é útil.
- Contudo, $T^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim IG(\mu, n\lambda)$.
- Além disso, $Q = \frac{n\lambda(\overline{X}-\mu)^2}{\mu^2\overline{X}} \sim \chi^2_1$.
- Portanto

$$
\begin{aligned}
& P\left(q_1 < \frac{n\lambda(\overline{X}-\mu)^2}{\mu^2\overline{X}} < q_2\right) = \gamma \\
\leftrightarrow \quad & P\left(\sqrt{\frac{\overline{X}q_1}{n\lambda}} < \frac{(\overline{X}-\mu)}{\mu} < \sqrt{\frac{\overline{X}q_2}{n\lambda}}\right) = \gamma
\end{aligned}
$$

Normal inversa (λ conhecido)

- Cont.

$$P\left(\sqrt{\frac{\overline{X}q_1}{n\lambda}}+1<\frac{\overline{X}}{\mu}<\sqrt{\frac{\overline{X}q_2}{n\lambda}}+1\right)=\gamma$$

$$\leftrightarrow \quad P\left(\overline{X}\left(\sqrt{\frac{\overline{X}q_2}{n\lambda}}+1\right)^{-1}<\mu<\overline{X}\left(\sqrt{\frac{\overline{X}q_1}{n\lambda}}+1\right)^{-1}\right)=\gamma$$

- Assim, $IC(\mu,\gamma)=\left[\overline{X}\left(\sqrt{\frac{\overline{X}q_2}{n\lambda}}+1\right)^{-1};\overline{X}\left(\sqrt{\frac{\overline{X}q_1}{n\lambda}}+1\right)^{-1}\right]$, em que $P(X<q_1)=\frac{1-\gamma}{2}$, $P(X<q_2)=\frac{1+\gamma}{2}$, $X\sim\chi^2_1$.

Normal inversa (λ conhecido)

- TUMP: $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$
- Da forma da família exponencial, como $c(\mu)$ é crescente, então $\boldsymbol{X}$ tem RVMND em $t = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Logo, como $\lambda > 0$, então um TUMP é dado por:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, \ \text{se } t > c \\ 0, \text{cc} \end{cases} \tag{1}$$

em que $P_{\mu_0}(T > c) = \alpha$, em que se $\mu = \mu_0$, $T \sim NI(n\mu_0, n^2\lambda)$.

Normal inversa (λ conhecido)

- Como as condições de regularidade são válidas, temos que $\sqrt{n}\,(\widehat{\mu}_n - \mu) \xrightarrow[n \to \infty]{D} N(0, \mu^3/\lambda)$.
- Assim, $IC(\mu,\gamma) = \left[\widehat{\mu} - z_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{\mu}^3}{\lambda}}; \widehat{\mu} + z_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{\mu}^3}{\lambda}}\right]$, em que $P(Z \leq z_{\frac{1+\gamma}{2}}) \approx \frac{1+\gamma}{2}$, $Z \sim N(0,1)$.
- Um teste assintótico para testar $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_0 : \mu \neq \mu_0$, é dado por:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, \text{ se } t < -c \text{ ou } t > c \\ 0, \text{cc} \end{cases}$$

em que $t = \frac{\widetilde{\mu} - \mu_0}{\frac{\widetilde{\mu}^3}{n\lambda}}$, $P_{\mu_0}(T < c) = \frac{1+\gamma}{2}$ e $T = \frac{\widehat{\mu} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\widehat{\mu}^3}{n\lambda}}} \approx N(0,1)$, sob H_0, para n suficientemente grande

Normal inversa (λ conhecido)

- Hipóteses: $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_0 : \mu \neq \mu_0$
- TRV (versão assintótica). Lembre que $\widehat{\mu}_0 = \mu_0$:

$$
\begin{aligned}
Q_{RV} &= 2(l(\widehat{\mu}) - l(\widehat{\mu}_0)) = \lambda\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\overline{x})^2}{\overline{x}^2 x_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{\mu_0^2 x_i}\right) \\
&= \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\left(\frac{1}{\mu_0^2}-\frac{1}{\overline{x}^2}\right) - 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\overline{x}}\right)\right) \\
&= \lambda\left(\left(\frac{1}{\mu_0^2}-\frac{1}{\overline{x}^2}\right)n\overline{x} - 2n\left(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\overline{x}}\right)\right) \\
&= \lambda\left[\frac{n}{\mu_0}\left(\frac{\overline{x}}{\mu_0}-2\right)+\frac{n}{\overline{x}}\right]
\end{aligned}
$$

Normal inversa (λ conhecido)

- Wald.

$$
\begin{aligned}
Q_{RV} &= \frac{(\widehat{\mu}-\mu_0)^2}{\frac{\widehat{\mu}^3}{n\lambda}} = \frac{n\lambda(\widehat{\mu}-\mu_0)^2}{\widehat{\mu}^3} = n\lambda\left(\frac{1}{\overline{x}} - 2\frac{\mu_0}{\overline{x}^2} + \frac{\mu_0^2}{\overline{x}^3}\right) \\
&= \frac{n\lambda\mu_0^2}{\overline{x}^3}\left(\frac{\overline{x}^2}{\mu_0^2} - 2\overline{x} + 1\right)
\end{aligned}
$$

- Escore de Rao: $H_0 : g(\mu) = \mu - \mu_0 = 0$ vs $H_0 : g(\mu) = \mu - \mu_0 \neq 0$

  (Lembre que $\widehat{\mu}_0 = \mu_0$)

$$
Q_S = \frac{S^2(\mu_0)}{I(\mu_0)} = \frac{\lambda^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)}{\mu_0^3}\right)^2}{\frac{n\lambda}{\mu_0^3}} = \frac{n\lambda}{\mu_0}\left(\frac{\overline{x}}{\mu_0} - 1\right)^2
$$

Normal inversa (μ conhecido)

- Priori conjugada. Note que

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) &\propto \lambda^{n/2} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}\right\} \\ &\rightarrow p(\lambda) \propto \lambda^{a-1}e^{-\lambda b} \end{aligned}$$

- Assim, a priori conjugada é dada por $\lambda \sim \text{gama}(a, b^{-1})$.
- Portanto, a posteriori é dada por:

$$p(\lambda|\boldsymbol{x}) \propto \lambda^{n/2+a-1} e^{\left\{-\lambda\left(b+\frac{1}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}\right)\right\}}$$

- Logo, $\lambda|\boldsymbol{x} \sim \text{gama}(a^*, (b^*)^{-1})$, em que $a^* = n/2 + a$, $b^* = b + \frac{1}{2\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{x_i}$

Normal inversa (μ conhecido)

- Estimador de Bayes sob perda quadrática:

$$\widehat{\lambda}_{Bayes} = \mathcal{E}(\lambda|\boldsymbol{X}) = \frac{n+2a}{\frac{1}{\mu^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{X_i}+2b}$$

- Intervalo de Credibilidade. Do slides anterior, temos que $2b^*\lambda|\boldsymbol{x} \sim \chi^2_{2a^*}$. Assim,

$$\begin{aligned} P\left(q_1 < 2b^*\lambda < q_2|\boldsymbol{x}\right) &= \gamma \\ P\left(\frac{q_1}{2b^*} < \lambda < \frac{q_2}{2b^*}|\boldsymbol{x}\right) &= \gamma \qquad (2) \end{aligned}$$

- Assim, $IC_B(\lambda;\gamma) = \left[\frac{q_1}{2b^*};\frac{q_2}{2b^*}\right]$, em que $P(X < q_1) = \frac{1-\gamma}{2}$ e $P(X < q_2) = \frac{1+\gamma}{2}$.

Normal inversa (μ conhecido)

- Teste de hipótese (IB): $H_0 : \lambda \leq \lambda_0$ vs $H_1 : \lambda > \lambda_0$. Note que:

$$
\begin{aligned}
P(\lambda \in \Theta_0|\boldsymbol{x}) \geq c &= P(\lambda \leq \lambda_0|\boldsymbol{x}) \geq c \\
&= P(2b^*\lambda \leq 2b^*\lambda_0|\boldsymbol{x}) \geq c \\
&\to 2b^*\lambda_0 \geq F_v^{-1}(c) \to b^* \geq \frac{F_V^{-1}(c)}{2b^*} \\
&\to \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\mu^2 x_i} \geq \frac{F_V^{-1}(c)}{2b^*} - b
\end{aligned}
$$

- Assim, sendo $F_V(.)$ é a fda de $V \sim \chi^2_{2a^*}$, temos que:

$$
RC = \left\{ \boldsymbol{x} \in \Re^{+n} : \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\mu^2 x_i} \geq \frac{F_X^{-1}(c)}{2b^*} - b \right\}
$$