Introdução à estimadores regressão

Prof. Caio Azevedo

Motivação

- Vimos que, quando há informações (em nível populacional) sobre uma variável auxiliar (x_i) e que a relação desta com a variável de interesse (y_i) puder ser expressa como uma reta passando pela origem (além de outros fatores: magnitude dos coeficientes de variação e da correlação entre as duas variáveis), estimadores razão podem ser mais apropriados do que os estimadores usuais.
- Tal abordagem também pode ser útil quando não conhecemos, por exemplo, o tamanho da população (N).

Cenário

- Exploraremos, agora, estimadores que são mais apropriados quando a relação entre tais variáveis puder ser expressa como uma reta que não passa pela origem, ou seja: $y_i = \alpha + \beta x_i + e_i$ (nível populacional) $Y_i = \alpha + \beta X_i + E_i$ (nível amostral).
- Consideraremos as mesmas notações e suposições (acerca dos parâmetros populacionais da variável x) feitas para o estimador razão.

Cenário

- O estimador regressão para a média é definido como:

$$\widehat{\mu}_{Reg} = \widehat{\mu} + b\left(\mu_x - \overline{X}\right)$$

em que b é uma estimativa apropriada de β (slide anterior). Consideraremos, portanto, em princípio, que b não é aleatório) e $\widehat{\mu} = \overline{Y}$.

- Note que se $b > 0$ e $\overline{x}$ é pequeno com relação à μ_x então, devido à linearidade entre y e x, a diferença entre $\widehat{\mu}_{Reg}$ e $\widehat{\mu}$ também é pequena.

Propriedades dos estimadores

- Note ainda que o estimador $\widehat{\mu}_{Reg}$ faz uma "correção" em $\widehat{\mu}$, isto é, adiciona a $\widehat{\mu}$ uma quantidade proporcional a $\mu_x - \overline{X}$, ou seja, $b(\mu_x - \overline{X})$.
- O estimador regressão para o total populacional é dado por $\widehat{\tau}_{Reg} = N\widehat{\mu}_{Reg}$.
- Consideraremos, inicialmente, que $b = b_0$ (é um valor conhecido).
- Note que, nesse caso, temos duas variáveis aleatórias no estimador $\widehat{\mu}_{Reg}$, nomeadamente $\widehat{\mu}(= \overline{Y})$ e $\overline{X}$.

Propriedades dos estimadores

- Temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\widehat{\mu}_{Reg}) &= \mathcal{E}\left[\widehat{\mu} + b_0\left(\mu_x - \overline{X}\right)\right] = \mathcal{E}(\widehat{\mu}) + b_0\left[\mu_x - \mathcal{E}(\overline{X})\right] \\ &= \mu_y + b_0\left(\mu_x - \mu_x\right) = \mu_y\end{aligned}$$

- Para o cálculo da variância, defina $D_i = Y_i - b_0\left(X_i - \mu_x\right)$, $i = 1, 2, ..., n$ e note que

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{Reg} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - b_0\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu_x\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[Y_i - b_0\left(X_i - \mu_x\right)\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i = \overline{D}\end{aligned}$$

Propriedades dos estimadores

- Defina agora $d_i = y_i - b_0(x_i - \mu_x)$. Note que

$$\begin{aligned}
\mu_d &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[y_i - b_0(x_i - \mu_x)] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i - b_0\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \mu_x\right) = \mu_y - b_0(\mu_x - \mu_x) = \mu_y
\end{aligned}$$

- Além disso:

$$
\begin{aligned}
\sigma_d^2 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[d_i - \mu_d\right]^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - b_0\left(x_i - \mu_x\right) - \mu_y\right]^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(y_i - \mu_y\right) - b_0\left(x_i - \mu_x\right)\right]^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(y_i - \mu_y\right)^2 - 2b_0\left(x_i - \mu_x\right)\left(y_i - \mu_y\right) + b_0^2\left(x_i - \mu_x\right)^2\right]^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \mu_y\right)^2 - 2b_0\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \mu_x\right)\left(y_i - \mu_y\right) \\
&+ b_0^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \mu_x\right)^2 \\
&= \sigma_y^2 - 2b_0\sigma_{xy} + b_0^2\sigma_x^2
\end{aligned}
$$

Propriedades dos estimadores

- (Cont.) Em que $\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mu_y)^2$ (analogamente para s_x^2), $\sigma_{xy} = \text{Cov}(x, y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$.
- Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{A_1}(\widehat{\mu}_{Reg}) &= \mathcal{V}_{A_1}(\overline{D}) = \frac{\sigma_d^2}{n} \\ \mathcal{V}_{A_2}(\widehat{\mu}_{Reg}) &= \mathcal{V}_{A_2}(\overline{D}) = (1-f)\frac{s_d^2}{n} \end{aligned}$$

em que $f = \frac{n}{N}$, $s_d^2 = s_y^2 - 2b_0 s_{xy} + b_0^2 s_x^2$, $s_y^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mu_y)^2$ (analogamente para s_x^2) e $s_{xy} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$.

Propriedades dos estimadores

- Estimadores não viciados para as variâncias anteriores são dados por:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{V}}_{A_1}\left(\widehat{\mu}_{Reg}\right) &= \frac{\widehat{\sigma}_d^2}{n} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[(Y_i-\overline{Y})-b_0(X_i-\overline{X})\right]^2 \\ &= \frac{1}{n}\left(\widehat{\sigma}_y^2 - 2b_0\widehat{\sigma}_{xy} + b_0^2\widehat{\sigma}_x^2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{V}}_{A_2}\left(\widehat{\mu}_{Reg}\right) &= (1-f)\frac{\widehat{s}_d^2}{n} = \frac{1-f}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left[(Y_i-\overline{Y})-b_0(X_i-\overline{X})\right]^2 \\ &= \frac{1-f}{n}\left(\widehat{s}_y^2 - 2b_0\widehat{s}_{xy} + b_0^2\widehat{s}_x^2\right)\end{aligned}$$

Propriedades dos estimadores

- Em que $\widehat{\sigma}_d^2 = \widehat{s}_d^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - \widehat{\mu}_{Reg}\right)^2$, $\widehat{\sigma}_y^2 = \widehat{s}_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$, $\widehat{\sigma}_x^2 = \widehat{s}_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ e $\widehat{\sigma}_{xy} = \widehat{s}_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)\left(X_i - \overline{X}\right)$.
- Prova: Basta utilizar algumas propriedades do valor esperado e lembrar que $\mathcal{E}_{A_1}\left(\widehat{\sigma}_y^2\right) = \sigma_y^2$, $\mathcal{E}_{A_1}\left(\widehat{\sigma}_x^2\right) = \sigma_x^2$, $\mathcal{E}_{A_2}\left(\widehat{s}_y^2\right) = \sigma_y^2$, $\mathcal{E}_{A_2}\left(\widehat{s}_x^2\right) = \sigma_x^2$, $\mathcal{E}_{A_1}\left(\widehat{\sigma}_{xy}\right) = \sigma_{xy}$, $\mathcal{E}_{A_1}\left(\widehat{s}_{xy}\right) = s_{xy}$.

Otimalidade do estimador regressão

- O valor de b_0 que minimiza $\mathcal{V}_{AE_1}\left(\widehat{\mu}_{Reg}\right)$ é dado por

$$B_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \mu_y\right)\left(x_i - \mu_x\right)}{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \mu_x\right)^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \tag{1}$$

- Além disso, para o b_0 acima, $\mathcal{V}_{A_1(min)}(\widehat{\mu}_{Reg}) = \frac{\sigma_y^2}{n}\left(1 - \rho^2[x,y]\right)$, $\rho[x,y] = \sigma_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$.

Cont;

- Prova: Seja $b_0 = B_0 + c$, $c \in \Re$. Tem-se, então, para este b_0 que

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{A_1}(\widehat{\mu}_{Reg}) &= \frac{1}{n}\left[\sigma_y^2 - 2(B_0 + c)\sigma_{xy} + (B_0 + c)^2\sigma_x^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\left(\sigma_y^2 - 2\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} - 2c\sigma_{xy} + \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} + 2c\sigma_{xy} + c^2\sigma_x^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left\{\left(\sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2}\right) + c^2\sigma_x^2\right\}
\end{aligned}$$

que é mínimo quanto $c = 0$, lembrando que

$\rho_{xy} = \rho[x, y] = \sigma_{xy}/\sigma_x\sigma_y$.

Cont.

- Como na prática não é possível utilizar B_0 (parâmetro), devemos considerar um estimador apropriado, ou seja:

$$\widehat{B}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)\left(X_i - \overline{X}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}. \quad (2)$$

- Como estimador para $\mathcal{V}_{A_1}(\widehat{\mu}_{Reg})$ consideramos

$$\widehat{\mathcal{V}}_{A_1}(\widehat{\mu}_{Reg}) = \frac{1}{n}\left(\widehat{\sigma}_y^2 - 2\widehat{B}_0\widehat{\sigma}_{xy} + \widehat{B}_0^2\widehat{\sigma}_x^2\right)$$

- Note que, neste caso, tal estimador não é, necessariamente, não viciado.

Exemplo

- Considere uma população formada por três domicílios, $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ e que se observam as seguintes variáveis: nome (do chefe), sexo, idade, fumante ou não, renda bruta (mensal em salários mínimos) familiar e número de trabalhadores.
- Considere que o objetivo é estimar $\overline{f}$ a média da renda bruta familiar.

Cont.

Variável	**Valores**			**Notação**
Unidade	1	2	3	i
nome do chefe	Ada	Beto	Ema	a_i
sexo (0: F, 1:M)	0	1	0	x_i
idade	20	30	40	y_i
fumante (0: N, 1:S)	0	1	1	g_i
renda bruta familiar	12	30	18	f_i
n^o de trabalhadores	1	3	2	t_i

Cont.

- Considere um plano AASc e n $= 2$. Além disso, defina $\overline{F}_R = \mu_t \left(\frac{\overline{F}}{\overline{T}} \right)$ e $\overline{F}_{Reg} = \overline{F} + B_0(\mu_t - \overline{T})$ (para B_0, veja slide seguinte)
- Dessa forma, temos que:

s	11	12	13	21	22	23	31	32	33
$\overline{F}$	12	21	15	21	30	24	15	24	18
$\overline{T}$	1,0	2,0	1,5	2,0	3,0	2,5	1,5	2,5	2,0
$\overline{F}_{Reg}$	21,0	21,0	19,5	21	21,0	19,5	19,5	19,5	18,0
$P(\boldsymbol{s})$:	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9

- De onde obtemos que $\mathcal{E}(\overline{F}_{Reg}) = 20$, $\mathcal{V}(\overline{F}_{Reg}) = 1$, $\mathcal{E}(\overline{F}_R) \approx 20,27$, $\mathcal{V}(\overline{F}_R) \approx 2,52$.

Cont.

- Neste caso temos que $EQM(\overline{F}_{Reg}) = 1 < EQM(\overline{F}_R) = 2,59$ (este último obtido em aqui, página 9. Em geral, tal resultado é válido.
- Podemos ainda obter a variância do estimador regressão utilizando a fórmula obtida anteriormente. Note que $\mu_t = 2$, $\mu_f = 20$, $\sum_{i=1}^{3} f_i t_i = 138$, $\sum_{i=1}^{3} f_i^2 = 1368$, $\sum_{i=1}^{3} t_i^2 = 14$. Assim,

$$B_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i t_i - N\overline{F}\,\overline{T}}{\sum_{i=1}^{N} t_i^2 - N\overline{t}^2} = \frac{18}{2} = 9$$

- Também, com $b_0 = B_0 = 9$, $\sigma_F^2 = 56$, $\sigma_t^2 = 2/3$ e $\sigma_{ft} = 6$, tem-se, para $n = 2$, que

$$\mathcal{V}(\overline{F}_{Reg}) = \frac{1}{n}\left(\sigma_f^2 - 2b_0\sigma_{ft} + b_0^2\sigma_t^2\right) = 1.$$

Comparação entre os estimadores razão e regressão

- Considerando B_0 dado em (1) e sob AAS_c, temos que
  1. $\mathcal{V}(\widehat{\mu}_{Reg}) \leq \mathcal{V}(\widehat{\mu})$.
  2. $\mathcal{V}(\widehat{\mu}_{Reg}) \leq \mathcal{V}(\widehat{\mu}_R)$.
- Prova: Temos que $\mathcal{V}(\widehat{\mu}) = \frac{\sigma_y^2}{n}$ e $\mathcal{V}(\widehat{\mu}_{Reg}) = \frac{\sigma_y^2}{n}\left(1 - \rho[x,y]^2\right)$ $= \mathcal{V}(\widehat{\mu})\left(1 - \rho[x,y]^2\right)$, de onde segue o item 1), pois $0 \leq \rho[x,y]^2 \leq 1$.

Comparação entre os estimadores razão e regressão

- Por outro lado, temos que

$$\mathcal{V}(\widehat{\mu}_R) \approx \frac{1}{n}\left(\sigma_y^2 - 2\rho[x,y]\sigma_x\sigma_y + r^2\sigma_x^2\right)$$

- Portanto, vem que

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\widehat{\mu}_R) - \mathcal{V}(\widehat{\mu}_{Reg}) &\approx \frac{\sigma_y^2}{n} - \frac{2}{n}\rho[x,y]\sigma_x\sigma_y + \frac{1}{n}r^2\sigma_x^2 - \frac{\sigma_y^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{n}\rho[x,y]^2 \\
&= \frac{1}{n}\left(\rho^2[x,y]\sigma_y^2 - 2r\rho[x,y]\sigma_x\sigma_y + r^2\sigma_x^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\rho[x,y]\sigma_y - r\sigma_x\right)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

De onde se conclui o item 2).

Comparação entre os estimadores razão e regressão (para o total populacional)

- Temos que $\mathcal{E}(\widehat{\tau}_{Reg}) = \mathcal{E}(N\widehat{\mu}_{Reg}) = N\mathcal{E}(\widehat{\mu}_{Reg}) = N\mu_y = \tau_y$.
- Variâncias do estimador: $\mathcal{V}_{A_i}(\widehat{\tau}_{Reg}) = N^2\mathcal{V}_{A_i}(\widehat{\mu}_{Reg})$, $\mathcal{V}_{A_1}(\widehat{\tau}_{Reg}) = N^2\frac{\sigma_d^2}{n}$ e $\mathcal{V}_{A_2}(\widehat{\tau}_{Reg}) = (1-f)N^2\frac{s_d^2}{n}$.
- Estimativas da variância do estimador: $\widehat{\mathcal{V}}_{A_1}(\widehat{\tau}_{Reg}) = N^2\frac{\widehat{\sigma}_d^2}{n}$ e $\widehat{\mathcal{V}}_{A_2}(\widehat{\tau}_{Reg}) = (1-f)N^2\frac{\widehat{s}_d^2}{n}$.
- Intervalos de confiança, testes de hipótese, e tamanho de amostra podem ser obtidos de forma semelhante aos estimadores usuais (para a média e total) sob AAS_c e AAS_s.

Comentários

- À rigor, portanto, o estimador regressão (para a média) é dado por: $\widehat{\mu}^*_{Reg} = \widehat{\mu} + \widehat{B}_0 \left(\mu_x - \overline{X}\right)$
- Note que as maioria das expressões (esperança e variância dos estimadores regressão) foram obtidas considerando-se $b_0(B_0)$ fixo (não aleatório). Como $\widehat{B}_0 \xrightarrow[\substack{n\to\infty,\\ N-n\to\infty}]{P} B_0$ (link 1, link 2), então os resultados são válidos, para n (N-n) suficientemente grandes.
- Ou seja, $|\widehat{\mu}^*_{Reg} - \widehat{\mu}_{Reg}| \xrightarrow[\substack{n\to\infty,\\ N-n\to\infty}]{P} 0.$
- Assim, $\mathcal{E}_{PA}(\widehat{\mu}^*_{Reg}) \approx \mathcal{E}_{PA}(\widehat{\mu}_{Reg})$ e $\mathcal{V}_{PA}(\widehat{\mu}^*_{Reg}) \approx \mathcal{V}_{PA}(\widehat{\mu}_{Reg})$

Resumo para AAS_s (para AAS_c é análogo)

- Se $b = b_0$ for conhecido, então: $\widehat{\mu}_{Reg} = \widehat{\mu} + b_0\left(\mu_x - \overline{X}\right)$,
  $\mathcal{V}_{A_2}\left(\widehat{\mu}_{Reg}\right) = \frac{1-f}{n}\left(s_y^2 - 2b_0 s_{xy} + b_0^2 s_x^2\right)$,
  $\widehat{\mathcal{V}}_{A_2}\left(\widehat{\mu}_{Reg}\right) = \frac{1-f}{n}\left(\widehat{s}_y^2 - 2b_0 \widehat{s}_{xy} + b_0^2 \widehat{s}_x^2\right)$,
  $EP_{A_2}\left(\widehat{\mu}_{Reg}\right) = \sqrt{\mathcal{V}_{A_2}\left(\widehat{\mu}_{Reg}\right)}, \widehat{EP}_{A_2}\left(\widehat{\mu}_{Reg}\right) = \sqrt{\widehat{\mathcal{V}}_{A_2}\left(\widehat{\mu}_{Reg}\right)}$
- Se $b = b_0$ for desconhecido, usa-se $\widehat{B}_0$ dado em (2), então:
  $\widehat{\mu}^*_{Reg} = \widehat{\mu} + \widehat{B}_0\left(\mu_x - \overline{X}\right)$,
  $\mathcal{V}_{A_2}\left(\widehat{\mu}^*_{Reg}\right) = \frac{1-f}{n}\left(s_y^2 - 2B_0 s_{xy} + B_0^2 s_x^2\right) = \frac{1-f}{n}\left(1 - \rho_{xy}^2\right)$,
  $\widehat{\mathcal{V}}_{A_2}\left(\widehat{\mu}^*_{Reg}\right) = \frac{1-f}{n}\left(\widehat{s}_y^2 - 2\widehat{B}_0 \widehat{s}_{xy} + \widehat{B}_0^2 \widehat{s}_x^2\right) = \frac{1-f}{n}\left(1 - \widehat{\rho}_{xy}^2\right)$,
  $EP_{A_2}\left(\widehat{\mu}^*_{Reg}\right) = \sqrt{\mathcal{V}_{A_2}\left(\widehat{\mu}^*_{Reg}\right)}, \widehat{EP}_{A_2}\left(\widehat{\mu}^*_{Reg}\right) = \sqrt{\widehat{\mathcal{V}}_{A_2}\left(\widehat{\mu}^*_{Reg}\right)}$
- Em que $\widehat{\rho}_{xy} = \frac{\widehat{s}_{xy}}{\widehat{s}_x \widehat{s}_y}$, $\widehat{s}_x = \sqrt{\widehat{s}_x^2}$ e $\widehat{s}_y = \sqrt{\widehat{s}_y^2}$. O análogo vale para $\widehat{\tau}_{Reg} = N\widehat{\mu}_{Reg}$.

Teoria assintótica

- Para n e N suficientemente grandes, a convergência em distribuição para a normal padrão é válida, de modo semelhante ao caso dos estimadores usuais sob AAS_c e AAS_s (PA: indica um plano amostral apropriado).
- Portanto, sob certas condições, em relação à estimação da média, temos que (válido, de forma análoga, para $\widehat{\mu}^*_{Reg}$)

$$\frac{\widehat{\mu}_{Reg} - \mu}{\mathrm{EP}_{PA}(\widehat{\mu}_{Reg})} \xrightarrow[\substack{n\to\infty,\\ N-n\to\infty}]{D} N(0,1)$$

$$\frac{\widehat{\mu}_{Reg} - \mu}{\widehat{\mathrm{EP}}_{PA}(\widehat{\mu}_{Reg})} \xrightarrow[\substack{n\to\infty,\\ N-n\to\infty}]{D} N(0,1)$$

Intervalos de confiança

- Analogamente aos casos anteriores, temos que dois intervalos assintóticos, com coeficiente de confiança de aproximadamente γ, são dados por:

$$
\begin{aligned}
IC(\mu, \gamma) &\approx \left[\widehat{\mu}_{Reg} - z_\gamma \widehat{\mathrm{EP}}_{PA}(\widehat{\mu}_{Reg}); \widehat{\mu}_{Reg} + z_\gamma \widehat{\mathrm{EP}}_{PA}(\widehat{\mu}_{Reg})\right] \\
IC^*(\mu, \gamma) &\approx \left[\widehat{\mu}^*_{Reg} - z_\gamma \widehat{\mathrm{EP}}_{PA}(\widehat{\mu}^*_{Reg}); \widehat{\mu}^*_{Reg} + z_\gamma \widehat{\mathrm{EP}}_{PA}(\widehat{\mu}^*_{Reg})\right]
\end{aligned}
$$

- Erro da estimativa: $z_\gamma \widehat{\mathrm{EP}}_{PA}(\widehat{\mu}_{Reg}) \left(z_\gamma \widehat{\mathrm{EP}}_{PA}(\widehat{\mu}^*_{Reg})\right)$.

Testes de Hipótese

- Hipóteses usuais (μ_0 conhecido)
  1. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$.
  2. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$.
  3. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
- Estatística do teste $Z_t = \frac{\widehat{\mu}_{Reg} - \mu_0}{\widehat{\text{EP}}_{PA}(\widehat{\mu}_{Reg})}$.
- Sob H_0, vimos que $Z_t \approx N(0, 1)$, para n e N-n suficientemente grandes.

Testes de Hipótese

- Defina $z_t = \frac{\widetilde{\mu}_{Reg} - \mu_0}{\widetilde{EP}_{PA}(\widehat{\mu}_{Reg})}$ o valor calculado da estatística do teste e z_c o(s) valor(es) crítico(s).
- Defina ainda $Z \sim N(0,1)$. Os mecanismos de tomada de decisão são basicamente aqueles descritos nas páginas 20 a 23 dos slides
- O análogo pode ser feito considerando $\widehat{\mu}^*_{Reg}$ ao invés de $\widehat{\mu}_{Reg}$.

Determinação do tamanho amostral

- Estabelece-se algum critério de interesse acerca da acurácia/precisão na estimativa da média populacional.
- Sob o estimador proposto, calcula-se o tamanho da amostra, com base em sua distribuição assintótica obtida e critério estabelecido.
- Erro de estimativa: $z_\gamma \widehat{\text{EP}}_{PA}(\widehat{\mu}_{Reg})$. Fixa-se um erro de estimativa de interesse.
- Probabilidade do módulo da diferença $P\left(|\widehat{\mu}_{Reg} - \mu| < \delta\right) > \gamma$, $\delta > 0$, $\gamma \in (0, 1)$.

Determinação do tamanho amostral: erro da estimativa

$$\delta = z_\gamma \sqrt{\frac{\sigma_d^2}{n}} \rightarrow n = \frac{z_\gamma^2 \sigma_d^2}{\delta^2}$$

Em geral, o (um) valor de σ_R^2 é obtido através de pesquisas anteriores ou de uma amostra piloto, de tamanho apropriado.

Determinação do tamanho amostral: erro da estimativa

$$\begin{aligned}\delta &= z_\gamma \sqrt{\frac{(1-f)s_d^2}{n}} \rightarrow \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) = \frac{\delta^2}{z_\gamma^2 s_d^2} \rightarrow \frac{1}{n} = \frac{\delta^2}{z_\gamma^2 s_d^2} + \frac{1}{N} \\ \rightarrow \quad \frac{1}{n} &= \frac{\delta^2 N + z_\gamma^2 s_d^2}{N z_\gamma^2 s^2} \rightarrow n = \frac{N z_\gamma^2 s^2}{\delta^2 N + z_\gamma^2 s_d^2} = \frac{1}{\frac{\delta^2}{s_d^2 z_\gamma^2} + \frac{1}{N}}\end{aligned}$$

Em geral, o (um) valor de s_d^2 é obtido através de pesquisas anteriores ou de uma amostra piloto, de tamanho apropriado.

Exercício: Construir IC's e testes de hipótese para o total populacional.

Sob amostragem estratificada

- Se a população está estratificada, podemos considerar uma combinação dos resultados obtidos, anteriormente, sob AE, com os resultados obtidos para o estimador razão.
- A estrutura é a mesma daquela apresentada aqui.
- Defina: $\overline{Y}_h$, $\overline{X}_h$, μ_{xh}, as médias amostrais das variáveis y e x e a média populacional da variável x, respectivamente, no estrato h.

Sob amostragem estratificada

- Como estimadores para a média e o total populacionais, podemos considerar, respectivamente:

$$\widehat{\mu}_{Reges} = \sum_{h=1}^{H} W_h \left[\widehat{\mu}_h + b_{0h}\left(\mu_{xh} - \overline{X}_h\right)\right] = \sum_{h=1}^{H} W_h \widehat{\mu}_{Regh}$$

$$\widehat{\tau}_{Reges} = N\widehat{\mu}_{Reges} = \sum_{h=1}^{H} N_h \widehat{\mu}_{Regh}$$

Sob amostragem estratificada

- Usando resultados anteriores, temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{AE_1}(\widehat{\mu}_{Res}) &= \sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\sigma_{dh}^2}{n_h} \\ VM_{AE_2}(\widehat{\mu}_{Res}) &= \sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1-f_h) \frac{s_{dh}^2}{n_h} \end{aligned}$$

em que $f_h = \frac{n_h}{N_h}$, $\sigma_{dh}^2 = \frac{1}{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} \left(\sigma_{yh}^2 - 2b_0\sigma_{xyh} + b_0^2\sigma_x^2 \right)$ e $s_{dh}^2 = \frac{1}{N_h - 1} \sum_{i=1}^{N_h} \left(s_{yh}^2 - 2b_0 s_{xyh} + b_0^2\sigma_{xh}^2 \right)$.

Sob amostragem estratificada

- Estimadores para as variâncias são obtidos sustituindo-se as quantidades desconhecidas por estimadores apropriados, ou seja

$$\widehat{\mathcal{V}}_{AE_1}(\widehat{\mu}_{Res}) = \sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\widehat{\sigma}_{dh}^2}{n_h}$$

$$\widehat{\mathcal{V}}_{AE_2}(\widehat{\mu}_{Res}) = \sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1 - f_h) \frac{\widehat{s}_{dh}^2}{n_h}$$

em que $\widehat{\sigma}_{dh}^2 = \widehat{s}_{dh}^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} \left(\widehat{s}_{yh}^2 - 2 b_0 \widehat{s}_{xyh} + b_0^2 \widehat{s}_{xh}^2 \right)$.

Sob amostragem estratificada

- Exercício: desenvolver as fórumlas das variâncias e dos estimadores das variâncias para o estimador do total populacional $\widehat{\tau}_{Reges}$.
- O comportamento assintótico dos estimadores são semelhantes àquele relativos aos estimadores usuais sob AE.
- Intervalos de confiança e testes de hipótese podem ser desenvolvidos de modo semelhante ao exposto anteriormente.

Alocação ótima

- Sob alocação ótima e AAS_c dentro de cada estrato, como visto aqui, temos que:

$$n_h = n \frac{N_h \sigma_{dh} / \sqrt{c_h}}{\sum_{h=1}^{H} N_h \sigma_{dh} / \sqrt{c_h}}$$

- Raciocínio análogo pode ser considerado sob AAS_s dentro de cada estrato.

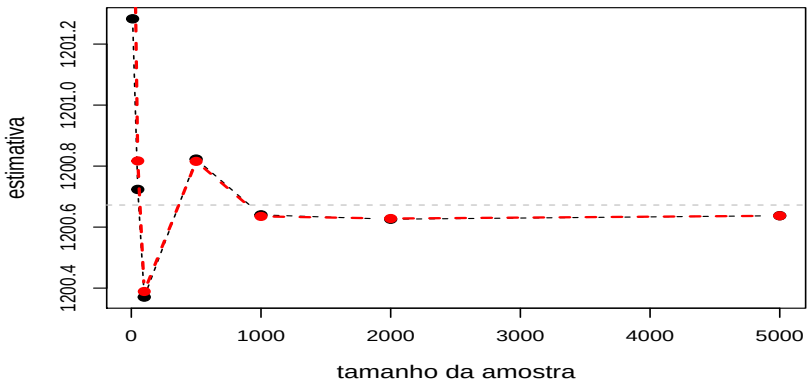
Compração entre os estimadores razão e regressão

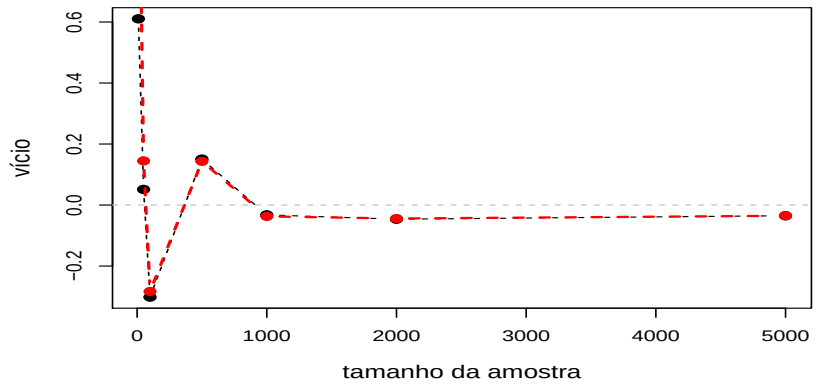
- Duas variáveis (y-resposta, x-auxiliar) foram simuladas considerando N=100.000 em dois cenários: $Y_i = 1,2X_i + E_i$ (cenário 1), $Y_i = 100 + 1,2X_i + E_i$ (cenário 2), $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(1.000, 10.000)$ e $E_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, 10.000)$.
- Objetivo: estimar μ_y.

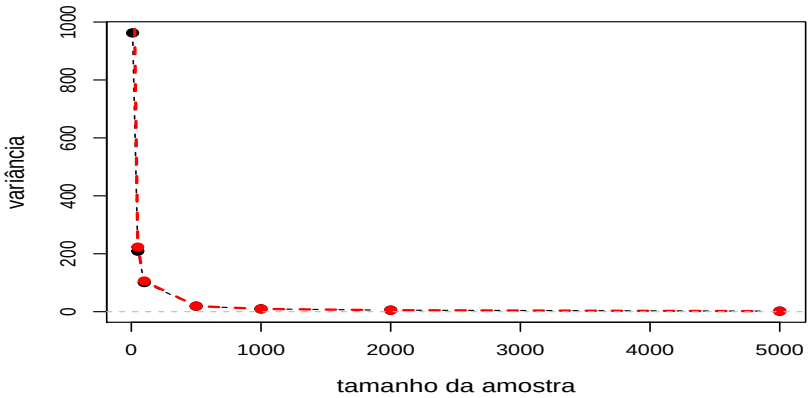
Compração entre os estimadores razão e regressão

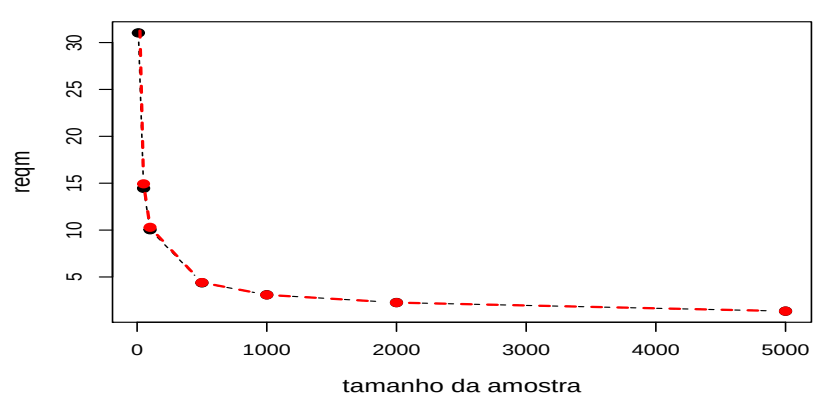
- R= 1.000 amostras foram selecionadas, sob diversos tamanhos $n = (10, 50, 100, 500, 1.000, 2.000, 5.000)'$.
- Foram calculados a média, vício, variância e raiz quadrática do erro quadrático médio dos estimadores razão e regressão (respectivamente em preto e vermelho nos dois gráficos a seguir). As linhas em cinza representam o valor verdadeiro de μ_y (primeiro gráfico) ou o valor zero (gráficos restantes).

Cenário 1

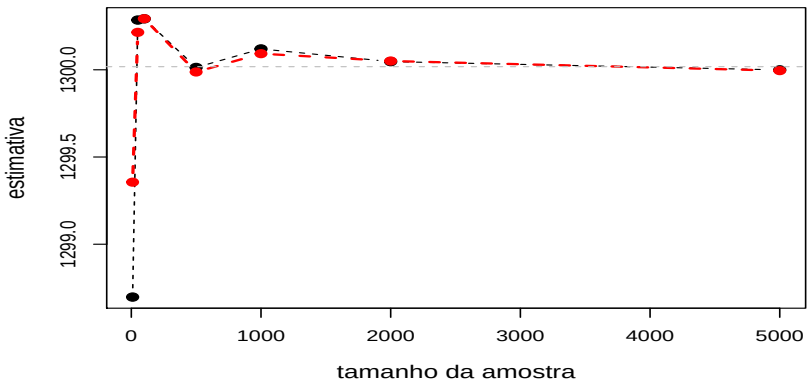

estimativa
1200.4
1200.6
1200.8
1201.0
1201.2
0
1000
2000
3000
4000
5000
tamanho da amostra

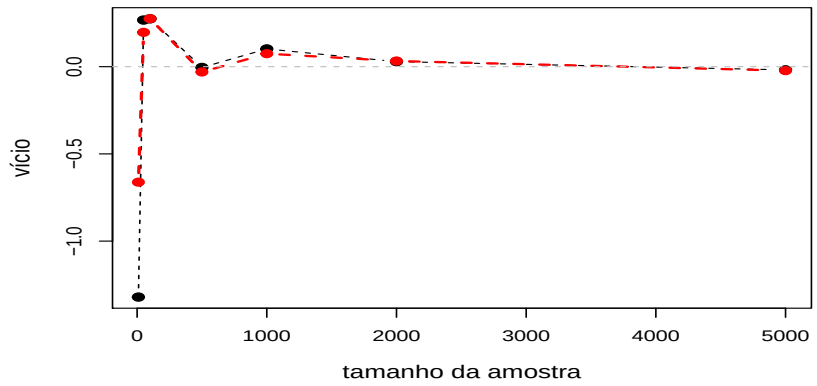

vício
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0
1000
2000
3000
4000
5000
tamanho da amostra

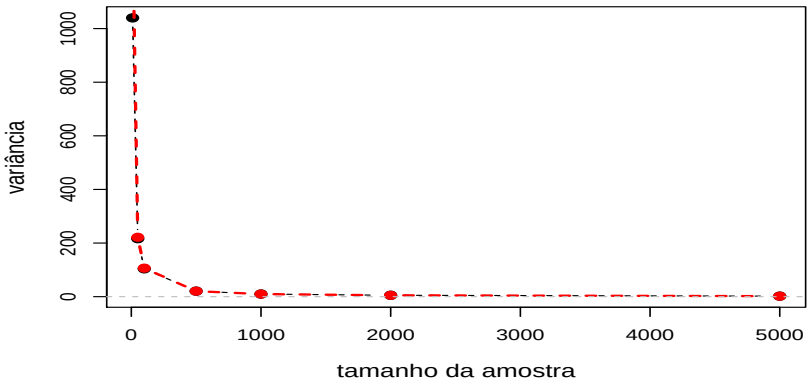

variância
0
200
400
600
800
1000
0
1000
2000
3000
4000
5000
tamanho da amostra

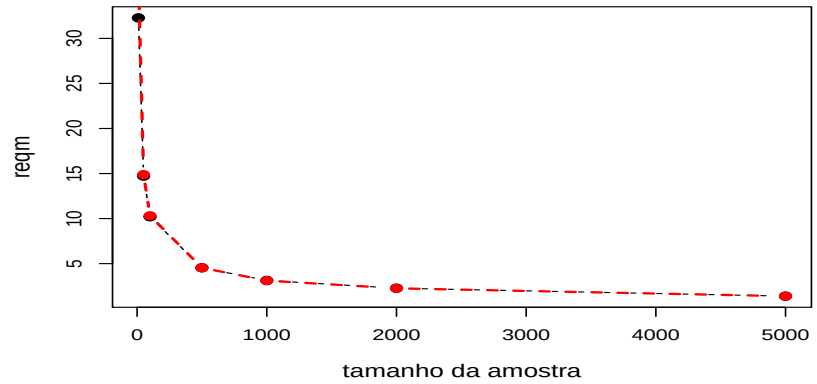

reqm
5
10
15
20
25
30
0
1000
2000
3000
4000
5000
tamanho da amostra

Cenário 2


estimativa
1299.0
1299.5
1300.0
0
1000
2000
3000
4000
5000
tamanho da amostra


vício
−1.0
−0.5
0.0
0
1000
2000
3000
4000
5000
tamanho da amostra


variância
0
200
400
600
800
1000
0
1000
2000
3000
4000
5000
tamanho da amostra


reqm
5
10
15
20
25
30
0
1000
2000
3000
4000
5000
tamanho da amostra

Aplicação: Exercício 6.11, Bolfarine & Bussab (2005)

- Uma fábrica de suco de laranja quer estimar quanto um caminhão com ($\tau_x =$) 1.000 kg de laranja produzirá de suco natural. Para isso, selecionaram-se 10 laranjas, com os seguintes resultados:

Laranja	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
peso (g) (x)	150	130	140	120	160	160	130	170	140	150
suco (ml) (y)	60	55	50	40	70	60	45	65	55	65

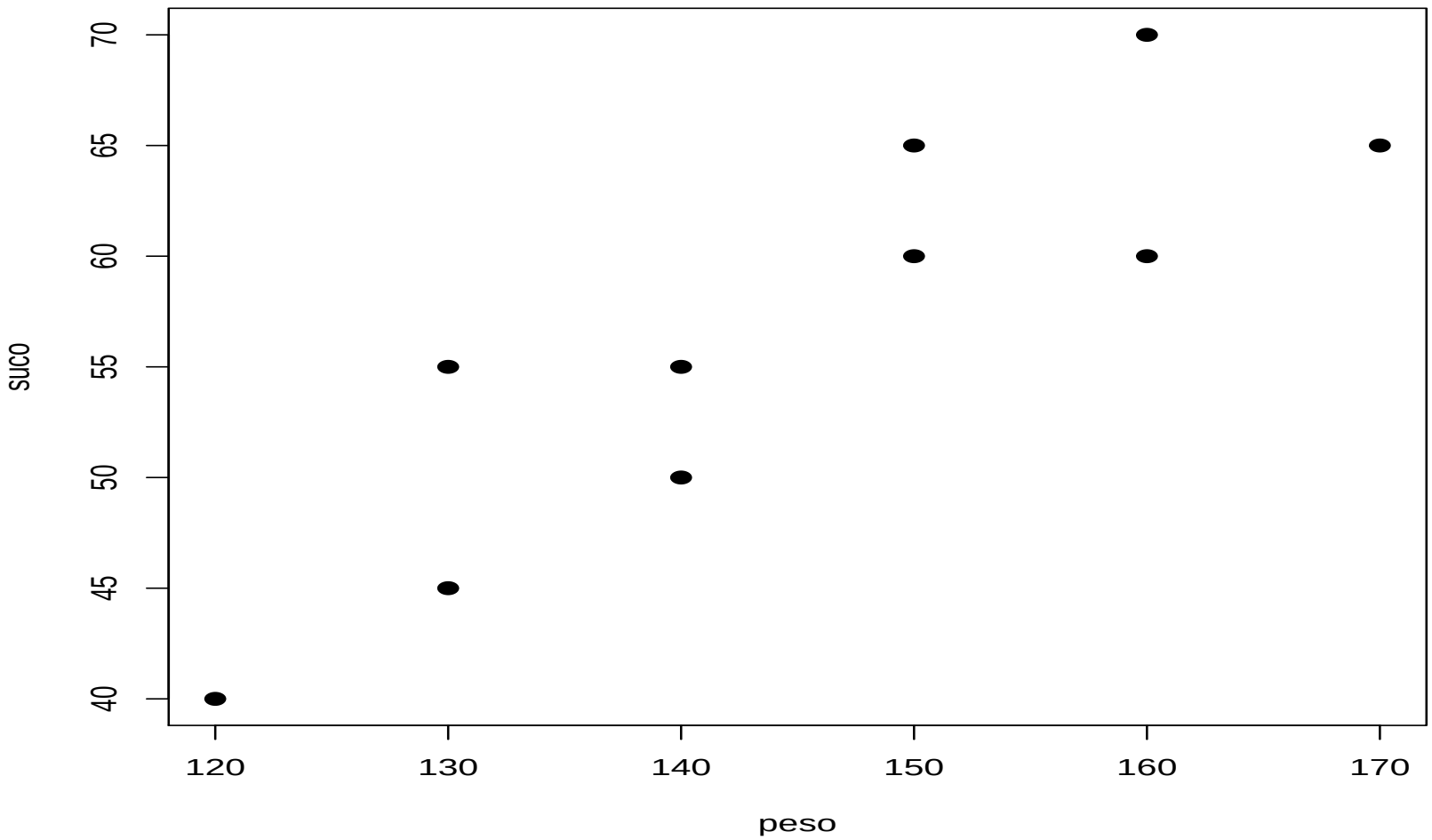
Comentários

- Consideraremos que a seleção fora feita segundo um PA: AAS_s.
- Como não dispomos de N (tamanho da população), e com os recursos vistos até o momento, só poderíamos usar o estimador razão.
- Contudo, vamos estimar N através de $\widetilde{N} = \frac{\tau_x}{\overline{x}} \approx 6897$, a fim de poder utilizar os estimadores regressão (estes slides) e expansão.

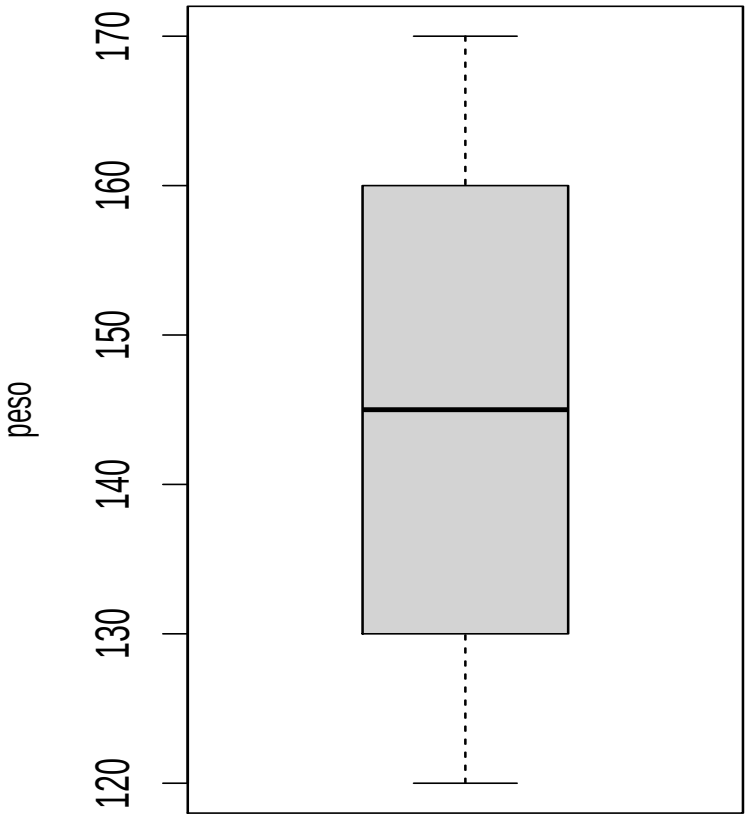
Medidas resumo

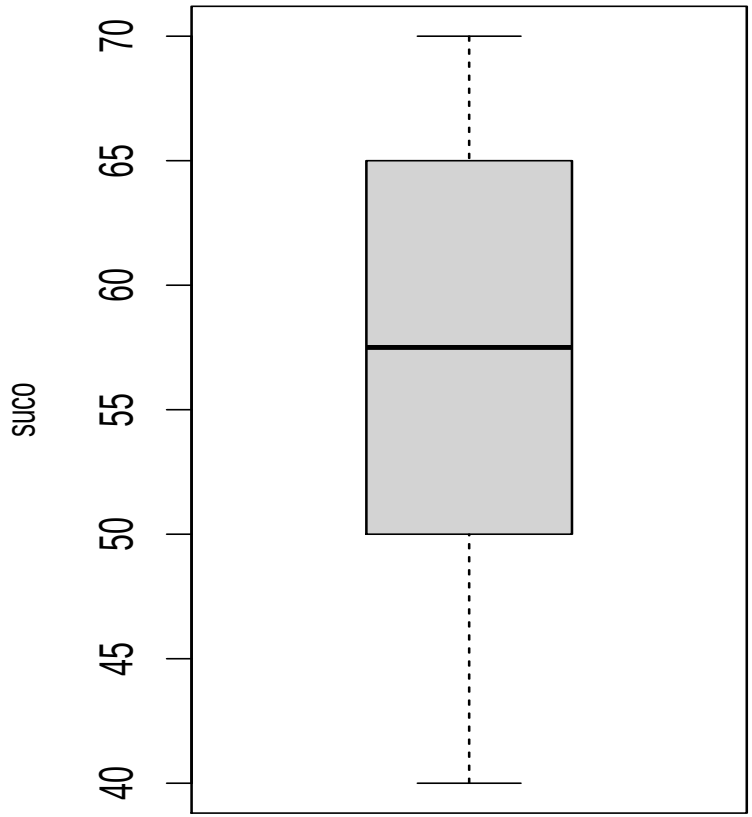
medida resumo	peso	suco
média	145,00	56,50
dp	15,81	9,44
variância	250,00	89,17
cv(%)	10,90	16,71
mínimo	120,00	40,00
mediana	145,00	57,50
máximo	170,00	70,00
curtose	-1,42	-1,27
ca	0,00	-0,30

Gráfico de dispersão entre as variáveis

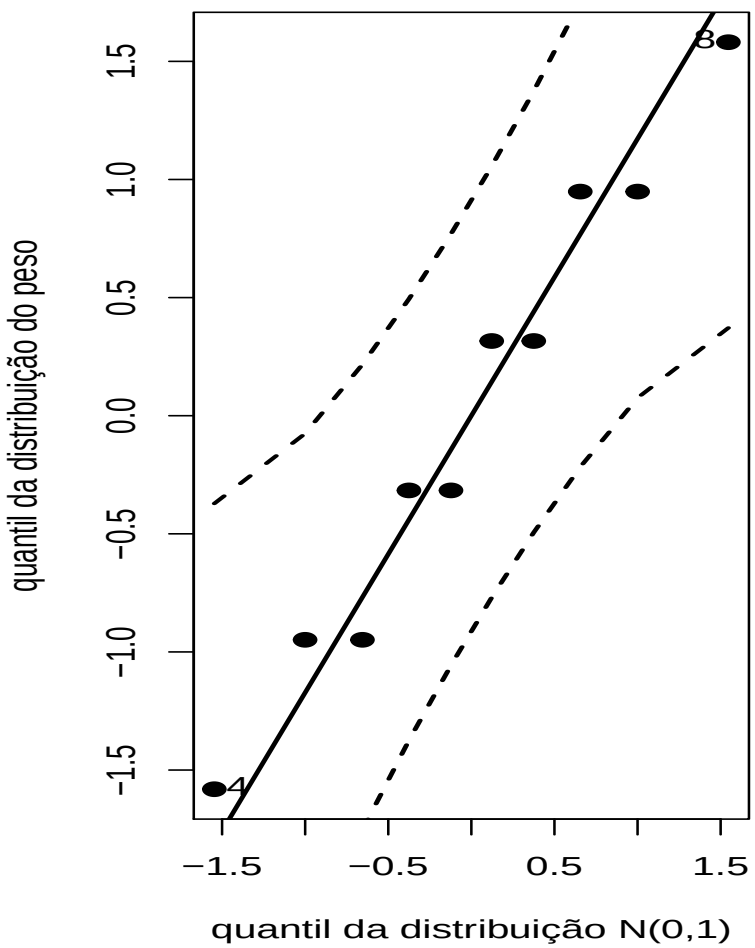


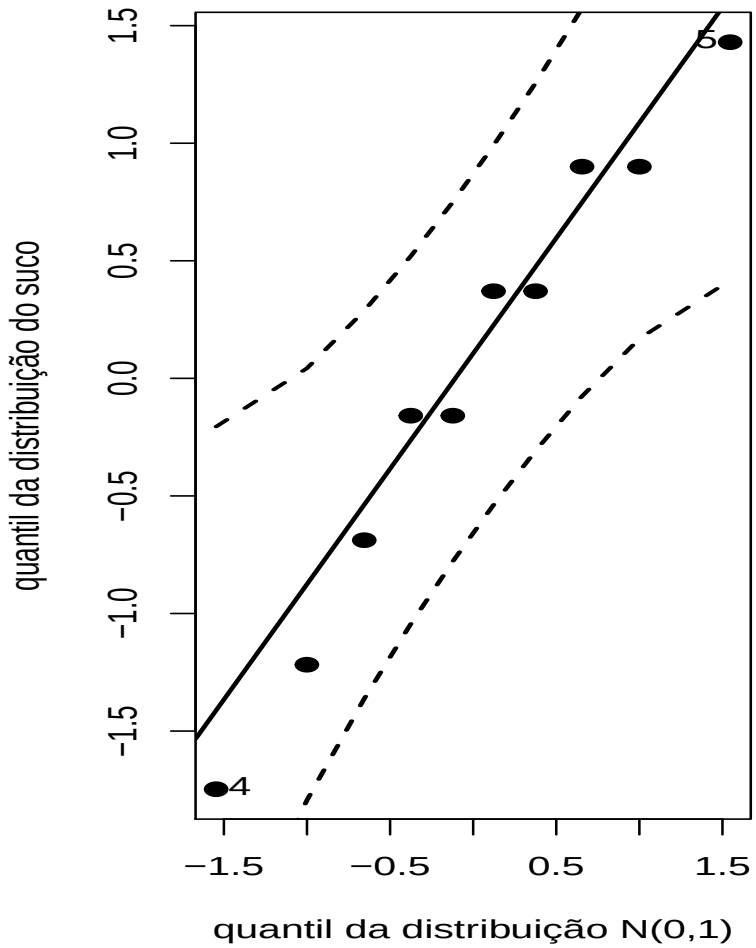
Boxplot das variáveis





QQ plot das variáveis





Resultados

- Os tesde de normalidade de Kolmogorov-Smirnov (KS) e Shapiro - Wilks (SW) não rejeitaram a normalidade: KS - peso : 0,13 (0,9964); suco : 0,15 (0,9850); SK - peso : 0,97 (0,8486); suco : 0,97 (0,8353).
- A correlação amostral de Pearson (estimativa (erro-padrão)) resultou em 0,874 (0,172). O teste para nulidade da correlação de Pearson resultou em $t = 5,10$ $(0,0009)$. Estes resultados indicam que as variáveis são significativa (e positivamente) correlacionadas.
- Usando modelos de regressão apropriados temos que a relação entre as duas variáveis parecer ser "adequadamente" representável por uma reta passando pela origem, (p=0,2340), (modelo de regressão normais lineares homocedásticos). Isso pode indicar um melhor desempenho do estimador razão, em relação aos outros dois.

Resultados

- Estimativas dos estimadores razão e regressão (estes slides) podem ser obtidos usando as funções "calibrate" e "predict" (link).
- Em geral, no pacote "survey" os erros-padrão são estimados usando o método de Horvitz?Thompson (HT) (link 1, link 2, link 3) que, em geral, são mais robustos que os estimadores usuais (presentes em vários livros, como aqueles que apresentamos ao longo do curso). Isso se aplica, em particular, ao estimador regressão.
- De uma certa forma, as estimativas dos erros-padrão via HT levam em consideração, de uma forma mais ampla, as incertezas associadas à estimação dos parâmetros.
- Vamos apresentar as duas estimativas do erro-padrão para tal estimador.

Comentários

- Se se fosse utilizar a modelagem clássica (distribuição dos dados) uma escolha usual (Graduação) seria a distribuição normal.
- Com efeito, as análises indicam que tal suposição parace ser razoável para as duas variáveis, (QQ-plots e testes de normalidade).
- Neste caso, análises inferenciais exatas (sob normalidade) são possíveis e, como (também) a presente abordagem (modelagem probabilítisca), utiliza resultados assintóticos, aquela pode ser melhor do que esta.
- Em geral, quanto mais as suposições de uma determinada abordagem forem válidas (para um dados problema) melhor é seu desempenho em relação à abordagens que demandam menos suposições.

Resultados (estimativas)

- Estimativas dos totais (em ml):

Estimador	Estimativa	EP	IC(95%)
Expansão	389.680,50	20.580,05	[349.344,34 ; 430.016,66]
Razão	389.655,17	10.979,25	[368.136,24 ; 411.174,11]
Regressão	389.646,56	9.984,52	[370.077,26 ; 409.215,85]

- A estimativa do EP de HT (estimador regressão) foi igual a 9.983,91 (próximo do estimador usual, acima).
- As estimativas pontuais são próximas. Contudo, a precisão relativa ao estimador regressão é a maior (o que coaduna com o resultado destes slides, pag. 20).