Amostragem Estratificada (AE): parte 2

Prof. Caio Azevedo

Resultados assintóticos

- Lembremo-nos que a notação AE_i, indica que fora realizada amostragem estratificada com seleção com reposição (i=1) e sem reposição (i=2), em cada estrato.
- Eventualmente, podemos utilizar as seguintes outras notações: $AE_i(pr), AE_i(un), AE_i(ot)$.
- Vimos que, independentemente da forma como se seleciona as amostras em cada estrato e do tipo de alocação, o estimador $\widehat{\mu}_{es}$ é não viciado, mudando apenas a forma de sua variâncias (consequentemente, a forma do estimador de sua variância).

Resultados assintóticos

- Sempre que o entendimento não for comprometido, apresentaremos os resultados de uma forma genérica (sem considerar uma forma de alocação específica), para cada um dos modos de selecionar amostras dentro de cada estrato (AAS_c, AAS_s).
- Precisamos que n_h e N_h, $h = 1, 2, ..., H$ sejam suficientemente grandes, para a validade dos resultados assintóticos.
- Pode-se provar que (consistência)

$$\widehat{\mu}_{es} \xrightarrow[\substack{n_h \to \infty, \\ N_h - n_h \to \infty, \\ h=1,2,\ldots,H}]{P} \mu$$

Resultados assintóticos

- Por outro lado, lembremos que $\mathcal{V}_{AE_1}(\widehat{\mu}_{es}) = \sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\sigma_h^2}{n_h}$ e $\mathcal{V}_{AE_2}(\widehat{\mu}_{es}) = \sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1-f_h) \frac{s_h^2}{n_h}$.
- Os respectivos estimadores não viciados das variâncias acima são dados por:

$$\widehat{\mathcal{V}}_{AE_1}(\widehat{\mu}_{es}) = \sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\widehat{\sigma}_h^2}{n_h} ; \widehat{\mathcal{V}}_{AE_2}(\widehat{\mu}_{es}) = \sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1-f_h) \frac{\widehat{s}_h^2}{n_h}, \text{ em que}$$

$$\widehat{\sigma}_h^2 = \widehat{s}_h^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widehat{\mu}_h)^2$$

Estimativas

- $\widetilde{\mu}_{es} = \sum_{h=1}^{H} W_h \widetilde{\mu}_h$, em que $\widetilde{\mu}_h = \frac{1}{n_h} \sum_{i \in \boldsymbol{s}_h} y_{hi}$, e $\boldsymbol{s}_h = \{k_{h1}, k_{h2}, .., k_{hn_h}\}$ (vetor de índices de indicam os elementos soretados do estrato h).
- $\widetilde{\sigma}_h^2 = \widetilde{s}_h^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i \in \boldsymbol{s}_h} (y_{hi} - \widetilde{\mu}_h)^2$.

Resultados assintóticos

- Pode-se provar que (consistência)

$$\widehat{\sigma}_h^2 \xrightarrow[\substack{n_h \to \infty, \\ N_h - n_h \to \infty, \\ h=1,2,\ldots,H}]{P} \sigma_h^2, s_h^2$$

- Por outro lado, temos que (convergência em distribuição)

$$\frac{\widehat{\mu}_{es} - \mu}{\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \sigma_h^2 / n_h}} \xrightarrow[\substack{n_h \to \infty, \\ N_h - n_h \to \infty, \\ h=1,2,\ldots,H}]{D} N(0,1)$$

$$\frac{\widehat{\mu}_{es} - \mu}{\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1 - f_h) s_h^2 / n_h}} \xrightarrow[\substack{n_h \to \infty, \\ N_h - n_h \to \infty, \\ h=1,2,\ldots,H}]{D} N(0,1)$$

Resultados assintóticos

- Consequentemente, vem que (AAS_c e AAS_s, respectivamente, em cada estrato, neste e no próximo slide)

$$\frac{\widehat{\mu}_{es} - \mu}{\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \widehat{\sigma}_h^2 / n_h}} = \frac{\widehat{\mu}_{es} - \mu}{\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \sigma_h^2 / n_h}} \frac{\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \widehat{\sigma}_h^2 / n_h}}{\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \sigma_h^2 / n_h}} \xrightarrow[\substack{n_h \to \infty, \\ N_h - n_h \to \infty, \\ h=1,2,\ldots,H}]{D} N(0,1)$$

Resultados assintóticos

$$
\begin{aligned}
\frac{\widehat{\mu}_{es} - \mu}{\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1 - f_h) \widehat{s}_h^2 / n_h}} &= \frac{\widehat{\mu}_{es} - \mu}{\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1 - f_h) s_h^2 / n_h}} \\
&\times \frac{\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1 - f_h) \widehat{s}_h^2 / n_h}}{\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1 - f_h) s_h^2 / n_h}} \\
&\xrightarrow[\substack{n_h \to \infty, \\ N_h - n_h \to \infty, \\ h = 1, 2, \ldots, H}]{D} N(0,1)
\end{aligned}
$$

Intervalo de Confiança

- Assim, intervalos de confiança (assintóticos) com coeficiente de confiança de aproximadamente γ são dados, respectivamente (AAS_c e AAS_s), por

$$
\begin{aligned}
IC(\mu,\gamma) &\approx \left[\widehat{\mu}_{es} - z_{\gamma}\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\widehat{\sigma}_h^2}{n_h}}; \widehat{\mu}_{es} + z_{\gamma}\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\widehat{\sigma}_h^2}{n_h}}\right] \\
IC(\mu,\gamma) &\approx \left[\widehat{\mu}_{es} - z_{\gamma}\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1-f_h) \frac{\widehat{s}_h^2}{n_h}}; \widehat{\mu}_{es} + z_{\gamma}\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1-f_h) \frac{\widehat{s}_h^2}{n_h}}\right]
\end{aligned}
$$

- Em que $P(Z \leq z_{\gamma}) = \frac{1+\gamma}{2}$ e $Z \sim N(0,1)$.
- Erros da estimativa: $z_{\gamma}\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\widehat{\sigma}_h^2}{n_h}}$ e $z_{\gamma}\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1-f_h) \frac{\widehat{s}_h^2}{n_h}}$.

Testes de Hipótese (AAS_c)

- Hipóteses usuais (μ_0 conhecido)
  1. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$.
  2. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$.
  3. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
- (AAS_c em cada estrato) Estatística do teste $Z_t = \frac{\widehat{\mu}_{es} - \mu_0}{\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\widehat{\sigma}_h^2}{n_h}}}$.
- Sob H_0, vimos que $Z_t \approx N(0,1)$, para n e N-n suficientemente grandes.
- Defina $z_t = \frac{\widetilde{\mu}_{es} - \mu_0}{\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\widetilde{\sigma}_h^2}{n_h}}}$ o valor calculado da estatística do teste e z_c o(s) valor(es) crítico(s).
- Defina ainda $Z \sim N(0,1)$.

Testes de Hipótese (AAS_s)

- Hipóteses usuais (μ_0 conhecido)
  1. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$.
  2. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$.
  3. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
- (AAS_s em cada estrato) Estatística do teste $Z_t = \frac{\widehat{\mu}_{es} - \mu_0}{\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1 - f_h) \frac{\widehat{s}_h^2}{n_h}}}$.
- Sob H_0, vimos que $Z_t \approx N(0,1)$, para n e N-n suficientemente grandes.
- Defina $z_t = \frac{\widetilde{\mu}_{es} - \mu_0}{\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1 - f_h) \frac{\widetilde{s}_h^2}{n_h}}}$ o valor calculado da estatística do teste e z_c o(s) valor(es) crítico(s).
- Defina ainda $Z \sim N(0,1)$.

Testes de Hipótese

- Procedimento para testar o conjunto de hipóteses [1]
- Valor crítico
  - $P(Z \leq z_c | H_0) = \alpha$.
  - Se $z_t \leq z_c$ rejeita-se H_0, caso contrário, não se rejeita.
- p-valor (nível descritivo)
  - $p - valor = P(Z \leq z_t | H_0)$

Testes de Hipótese

- Procedimento para testar o conjunto de hipóteses [2]
- Valor crítico
  - $P(Z \geq z_c | H_0) = \alpha$.
  - Se $z_t \geq z_c$ rejeita-se H_0, caso contrário, não se rejeita.
- p-valor (nível descritivo)
  - $p - valor = P(Z \geq z_t | H_0)$

Testes de Hipótese

- Procedimento para testar o conjunto de hipóteses [3]
- Valor crítico
  - $P(Z \leq z_c | H_0) = \frac{1+\alpha}{2}$.
  - Se $|z_t| \geq z_c$ rejeita-se H_0, caso contrário, não se rejeita.
- p-valor (nível descritivo)
  - $p - valor = 2[1 - P(Z \leq |z_t| | H_0)]$.

Determinação do tamanho amostral: erro da estimativa AAS_c e (AP)

$$
\begin{aligned}
\delta &= z_{\gamma}\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\sigma_h^2}{n_h}} \rightarrow \delta = z_{\gamma}\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\sigma_h^2}{nW_h}} \\
&\rightarrow n = \frac{z_{\gamma}^2}{\delta^2}\sum_{h=1}^{H} W_h \sigma_h^2
\end{aligned}
$$

Em geral, o (um) valor de $s_h^2, h = 1, 2, ..., H$ é obtido através de pesquisas anteriores ou de uma amostra piloto, de tamanho apropriado.

Determinação do tamanho amostral: erro da estimativa AAS_c e (AU)

$$\begin{aligned}
\delta &= z_{\gamma}\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\sigma_h^2}{n_h}} \rightarrow \delta = z_{\gamma}\sqrt{H\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\sigma_h^2}{n}} \\
\rightarrow & \quad n = H\frac{z_{\gamma}^2}{\delta^2}\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \sigma_h^2
\end{aligned}$$

Em geral, o (um) valor de $s_h^2, h = 1, 2, ..., H$ pode ser obtido através de pesquisas anteriores ou de uma amostra piloto, de tamanho apropriado, por exemplo.

Determinação do tamanho amostral: erro da estimativa AAS_s e (AP)

$$
\begin{aligned}
\delta &= z_{\gamma}\sqrt{\sum_{h=1}^{H}(1-f_h)W_h^2\frac{s_h^2}{n_h}} \to \delta^2 = z_{\gamma}^2\sum_{h=1}^{H}\left(\frac{1}{n_h}-\frac{1}{N_h}\right)W_h^2 s_h^2 \\
&\to \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{H}W_h s_h^2 = \frac{\delta^2}{z_{\gamma}^2} + \sum_{h=1}^{H}\left(\frac{W_h^2 s_h^2}{N_h}\right) \\
&\to n = \left(\sum_{h=1}^{H}W_h s_h^2\right)\left(\frac{\delta^2}{z_{\gamma}^2} + \sum_{h=1}^{H}\left(\frac{N_h s_h^2}{N^2}\right)\right)^{-1} \\
&= \left(\sum_{h=1}^{H}W_h s_h^2\right)\left(\frac{\delta^2}{z_{\gamma}^2} + \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{H}W_h s_h^2\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Determinação do tamanho amostral: erro da estimativa AAS_s e (AP)

Continuação

$$
\begin{aligned}
n &= \left(\sum_{h=1}^{H} W_h s_h^2\right)\left(\frac{N z_\gamma^2}{N\delta^2 + z_\gamma^2 \sum_{h=1}^{H} W_h s_h^2}\right) \\
&= \frac{1}{\frac{\delta^2}{z_\gamma^2 \sum_{h=1}^{H} W_h s_h^2} + \frac{1}{N}}
\end{aligned}
$$

Determinação do tamanho amostral: erro da estimativa AAS_s e (AU)

$$
\begin{aligned}
\delta &= z_{\gamma}\sqrt{\sum_{h=1}^{H}(1-f_h)W_h^2\frac{s_h^2}{n_h}} \to \delta^2 = z_{\gamma}^2\sum_{h=1}^{H}\left(\frac{1}{n_h}-\frac{1}{N_h}\right)W_h^2 s_h^2 \\
&\to \frac{H}{n}\sum_{h=1}^{H}W_h^2 s_h^2 = \frac{\delta^2}{z_{\gamma}^2}+\sum_{h=1}^{H}\left(\frac{W_h^2 s_h^2}{N_h}\right) \\
&\to n = H\left(\sum_{h=1}^{H}W_h^2 s_h^2\right)\left(\frac{\delta^2}{z_{\gamma}^2}+\sum_{h=1}^{H}\left(\frac{N_h s_h^2}{N^2}\right)\right)^{-1} \\
&\to n = H\left(\sum_{h=1}^{H}W_h^2 s_h^2\right)\left(\frac{\delta^2}{z_{\gamma}^2}+\frac{\sum_{h=1}^{H}W_h s_h^2}{N}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Determinação do tamanho amostral: erro da estimativa AAS_s e (AU)

Continuação

$$
\begin{aligned}
n &= H\left(\sum_{h=1}^{H} W_h^2 s_h^2\right)\left(\frac{Nz_\gamma^2}{N\delta^2 + z_\gamma^2 \sum_{h=1}^{H} W_h s_h^2}\right) \\
&= \frac{H}{\frac{\delta^2}{z_\gamma^2 \sum_{h=1}^{H} W_h^2 s_h^2} + \frac{\sum_{h=1}^{H} W_h s_h^2}{N \sum_{h=1}^{H} W_h^2 s_h^2}}
\end{aligned}
$$

Em geral, o (um) valor de $s_h^2, h = 1, 2, ..., H$ pode ser obtido através de pesquisas anteriores ou de uma amostra piloto, de tamanho apropriado, por exemplo.

Determinação do tamanho amostral: precisão

$$
\begin{aligned}
P_{AE_i}\left(|\widehat{\mu}_{es} - \mu| < \delta\right) > \gamma \quad & \leftrightarrow \quad P_{AE_i}\left(\left|\frac{\widehat{\mu}_{es} - \mu}{\sqrt{\mathcal{V}_{AE_i}(\widehat{\mu}_{es})}}\right| < \frac{\delta}{\sqrt{\mathcal{V}_{AE_i}(\widehat{\mu}_{es})}}\right) > \gamma \\
& \leftrightarrow \quad P_{AE_i}\left(|Z| < \frac{\delta}{\sqrt{\mathcal{V}_{AE_i}(\widehat{\mu}_{es})}}\right) > \gamma \\
& \leftrightarrow \quad \frac{\delta}{\sqrt{\mathcal{V}_{AE_i}(\widehat{\mu}_{es})}} = z_{\gamma}
\end{aligned}
$$

em que $Z \approx N(0,1)$. O que leva ao mesmo procedimento oriundo de se fixar o erro da estimativa.

Estimação do total

- Analogamente à AAS_c e AAS_s, podemos considerar o seguinte estimador para o total populacional: $\widehat{\tau}_{es} = N\widehat{\mu}_{es}$.
- Portanto, temos que $\mathcal{E}_{AE_i}(\widehat{\tau}_{es}) = N\mathcal{E}_{AE_i}(\widehat{\mu}_{es}) = N\mu = \tau$.
- Também, $\mathcal{V}_{AE_i}(\widehat{\tau}_{es}) = N^2\mathcal{V}_{AE_i}(\widehat{\mu}_{es})$. Portanto, $\mathcal{V}_{AE_1}(\widehat{\tau}_{es}) = N^2 \sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\sigma_h^2}{n_h}$ e $\mathcal{V}_{AE_2}(\widehat{\tau}_{es}) = N^2 \sum_{h=1}^{H}(1-f_h) W_h^2 \frac{s_h^2}{n_h}$.
- Os respectivos estimadores das variâncias são dados por: $\widehat{\mathcal{V}}_{AE_1}(\widehat{\tau}_{es}) = N^2 \sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\widehat{\sigma}_h^2}{n_h}$ e $\widehat{\mathcal{V}}_{AE_2}(\widehat{\tau}_{es}) = N^2 \sum_{h=1}^{H}(1-f_h) W_h^2 \frac{\widehat{s}_h^2}{n_h}$.

Resultados assintóticos

- Analogamente à estimação da média, vem que (AAS_c e AAS_s, respectivamente, em cada estrato)

$$\frac{\widehat{\tau}_{es} - \tau}{N\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \widehat{\sigma}_h^2 / n}} \xrightarrow[\substack{n_h \to \infty, \\ N_h - n_h \to \infty, \\ h=1,2,\ldots,H}]{D} N(0,1)$$

$$\frac{\widehat{\tau}_{es} - \tau}{N\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1 - f_h) \widehat{s}_h^2 / n}} \xrightarrow[\substack{n_h \to \infty, \\ N_h - n_h \to \infty, \\ h=1,2,\ldots,H}]{D} N(0,1)$$

Intervalo de Confiança

- Assim, intervalos de confiança (assintóticos) com coeficiente de confiança de aproximadamente γ são dados, respectivamente (AAS_c e AAS_s), por

$$IC(\tau,\gamma) \approx \left[\widehat{\tau}_{es} - z_{\gamma} N \sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\widehat{\sigma}_h^2}{n_h}} ; \widehat{\tau}_{es} + z_{\gamma} N \sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\widehat{\sigma}_h^2}{n_h}}\right]$$

$$IC(\tau,\gamma) \approx \left[\widehat{\tau}_{es} - z_{\gamma} N \sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1-f_h) \frac{\widehat{s}_h^2}{n_h}} ; \widehat{\tau}_{es} + z_{\gamma} N \sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1-f_h) \frac{\widehat{s}_h^2}{n_h}}\right]$$

em que $P(Z \leq z_{\gamma}) = \frac{1+\gamma}{2}$ e $Z \sim N(0,1)$. Erros da estimativa: $N z_{\gamma} \sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\widehat{\sigma}_h^2}{n_h}}$ e $N z_{\gamma} \sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1-f_h) \frac{\widehat{s}_h^2}{n_h}}$.

Testes de Hipótese (AAS_c)

- Hipóteses usuais (μ_0 conhecido)
  1. $H_0 : \tau = \tau_0$ vs $H_1 : \tau < \tau_0$.
  2. $H_0 : \tau = \tau_0$ vs $H_1 : \tau > \tau_0$.
  3. $H_0 : \tau = \tau_0$ vs $H_1 : \tau \neq \tau_0$.
- (AAS_c em cada estrato) Estatística do teste $Z_t = \frac{\widehat{\tau}_{es} - \tau_0}{N\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\widehat{\sigma}_h^2}{n_h}}}$.
- Sob H_0, vimos que $Z_t \approx N(0,1)$, para n e N-n suficientemente grandes.
- Defina $z_t = \frac{\widetilde{\tau}_{es} - \tau_0}{\sqrt{N\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\widetilde{\sigma}_h^2}{n_h}}}$ o valor calculado da estatística do teste e z_c o(s) valor(es) crítico(s).
- Defina ainda $Z \sim N(0,1)$.

Testes de Hipótese (AAS_s)

- Hipóteses usuais (μ_0 conhecido)
  1. $H_0 : \tau = \tau_0$ vs $H_1 : \tau < \tau_0$.
  2. $H_0 : \tau = \tau_0$ vs $H_1 : \tau > \tau_0$.
  3. $H_0 : \tau = \tau_0$ vs $H_1 : \tau \neq \tau_0$.
- (AAS_c em cada estrato) Estatística do teste
  $Z_t = \frac{\widehat{\tau}_{es} - \tau_0}{N\sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1-f_h)\frac{\widehat{s}_h^2}{n_h}}}$.
- Sob H_0, vimos que $Z_t \approx N(0,1)$, para n e N-n suficientemente grandes.
- Defina $z_t = \frac{\widetilde{\tau}_{es} - \tau_0}{\sqrt{N\sum_{h=1}^{H} W_h^2 (1-f_h)\frac{\widetilde{s}_h^2}{n_h}}}$ o valor calculado da estatística do teste e z_c o(s) valor(es) crítico(s).
- Defina ainda $Z \sim N(0,1)$.

Testes de Hipótese

- O procedimento de implementação dos testes (obtenção do valor crítico, p-valor, poder do teste) segue, essencialmente, o que fora exposto, para a média.

Determinação do tamanho amostral: erro da estimativa AAS_c e (AP)

$$
\begin{aligned}
\delta &= z_{\gamma} N \sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\sigma_h^2}{n_h}} \rightarrow \delta = z_{\gamma} N \sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\sigma_h^2}{n W_h}} \\
&\rightarrow n = \frac{z_{\gamma}^2 N^2}{\delta^2} \sum_{h=1}^{H} W_h \sigma_h^2
\end{aligned}
$$

Em geral, o (um) valor de $\sigma_h^2, h = 1, 2, ..., H$ é obtido através de pesquisas anteriores ou de uma amostra piloto, de tamanho apropriado.

Determinação do tamanho amostral: erro da estimativa AAS_c e (AU)

$$
\begin{aligned}
\delta &= z_{\gamma} N \sqrt{\sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\sigma_h^2}{n_h}} \rightarrow \delta = z_{\gamma} N \sqrt{H \sum_{h=1}^{H} W_h^2 \frac{\sigma_h^2}{n}} \\
\rightarrow & \quad n = \frac{H z_{\gamma}^2 N^2}{\delta^2} \sum_{h=1}^{H} W_h^2 \sigma_h^2
\end{aligned}
$$

Em geral, o (um) valor de $\sigma_h^2, h = 1, 2, ..., H$ é obtido através de pesquisas anteriores ou de uma amostra piloto, de tamanho apropriado.

Determinação do tamanho amostral: erro da estimativa AAS_s e (AP)

Analogamente ao caso da estimação da média, temos que:

$$\delta = z_{\gamma} N \sqrt{\sum_{h=1}^{H} (1 - f_h) W_h^2 \frac{s_h^2}{n_h}} \rightarrow \delta^2 = (z_{\gamma} N)^2 \sum_{h=1}^{H} \left(\frac{1}{n_h} - \frac{1}{N_h} \right) W_h^2 s_h^2$$

$$\rightarrow n = \frac{1}{\frac{\delta^2}{N^2 z_{\gamma}^2 \sum_{h=1}^{H} W_h s_h^2} + \frac{1}{N}}$$

Determinação do tamanho amostral: erro da estimativa AAS_s e (AU)

Analogamente ao caso da estimação da média, temos que:

$$
\begin{aligned}
\delta &= z_{\gamma} N \sqrt{\sum_{h=1}^{H} (1 - f_h) W_h^2 \frac{s_h^2}{n_h}} \to \delta^2 = (z_{\gamma} N)^2 \sum_{h=1}^{H} \left(\frac{1}{n_h} - \frac{1}{N_h} \right) W_h^2 s_h^2 \\
\to \quad n &= \frac{H}{\frac{\delta^2}{N^2 z_{\gamma}^2 \sum_{h=1}^{H} W_h^2 s_h^2} + \frac{\sum_{h=1}^{H} W_h s_h^2}{N \sum_{h=1}^{H} W_h^2 s_h^2}}
\end{aligned}
$$