Amostragem aleatória simples com reposição (parte 1)

Prof. Caio Azevedo

Estrutura geral

- Temos uma população de interesse de tamanho N e desejamos realizar inferências sobre algum parâmetro (média, total, proporção, variância) dessa população, com base em uma amostra de tamanho n.
- Com algumas adaptações, os resultados a serem vistos poderão ser utilizados mesmo se N for infinito.
- População: observações univariadas - $y_1, ..., y_N$ (variáveis não aleatórias), em que y_i é a observação relativa ao indivíduo i (podemos também considerar observações multivariadas $\boldsymbol{y}_i = (y_{i1}, ..., y_{ip})^t$). Exemplos: peso, altura, intenção de voto, conhecimento em alguma área.

Estrutura geral

- Objetivo: estimar $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$ (média, ou proporção se os $y_i' s$ forem variáveis binárias), $\tau = \sum_{i=1}^{N} y_i = N\mu$ (total), variância $(\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mu)^2)$ (esta, as vezes, tem de ser estimada para se poder fazer inferência para parâmetros de interesse como a média, total, proporção etc), com base na amostra de tamanho n, com reposição.
- Amostragem aleatória simples com reposição ($AAS_c \equiv A_1$).
- Amostra $\{y_{k_1}, y_{k_2}, ..., y_{k_n}\}$, em que $k_i \in \{1, 2, ..., N\}$. Por exemplo, Se N $= 5$ e n $= 3$, podemos ter $\{y_2, y_3, y_3\}$.

Mecanismo de sorteio da amostra

1. Dado que os elementos da população estão numerados de 1 a N, sorteia-se um elemento, segundo algum procedimento de geração de números aleatórios (link 1, link 2).
2. Repõe-se esse elemento na população.
3. Repete-se os procedimentos 1 e 2, $n - 1$ vezes.
4. No R:
   - Função “sample”.
   - Pacote “sampling”.
   - Pacote “survey”.

Notações/exemplo (univariado)

- População:
  - "Labels" - $\mathcal{U} = \{1, ..., N\}$.
  - Variável (não aleatória) - $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_N)^t$ (valores da característica de interesse para cada elemento na população).
- Amostra
  - "Labels" - $\{1, ..., n\}$.
  - Índices dos elementos a serem selecionados: $\boldsymbol{S} = (K_1, ..., K_n)$ (variável aleatória) e $\boldsymbol{s} = (k_1, ..., k_n)$ (os respectivos valores observados, índices sorteados).
  - Variável (aleatória) - $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^t$ (valores da característica de interesse para cada elemento sorteado).
- Exemplo: Suponha N=3, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^t$, n $= 2$ e que $\boldsymbol{s} = (2, 3)$. Assim, $k_1 = 2, k_2 = 3$, $Y_1 = y_2$ e $Y_2 = y_3$.

Estimação da média

- Estimador natural (replicar na amostra a fórmula do parâmetro de interesse) (sob duas formas diferentes):

$$\widehat{\mu} = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i \in \boldsymbol{S}} y_i \quad (1)$$

$$\widehat{\mu} = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} F_i y_i, \quad (2)$$

em que, na Equação (1) $Y_i, i = 1, .., n$ e $\boldsymbol{S} = (K_1, ..., K_n)$ são variáveis (vetores) aleatórios, enquanto que na Equação (2) F_i é uma v.a. que representa o número de vezes que o i-ésimo elemento da população apareceu na amostra.

Estimação da média

- Utilizar a forma (1) e considerar a distribuição das variáveis $\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_n)^t$ (esses desenvolvimentos dependem da distribuição considerada para a amostra).
- Neste caso, $Y_i, i = 1, .., n$ são variáveis aleatórias. Esta abordagem é vista nos cursos (usuais) de Inferência Estatística e pode, eventualmente, levar a inferências exatas, desde que as suposições sobre a distribuição de $\boldsymbol{Y}$ sejam válidas.
- Note que, neste caso, como há reposição $Y_i \overset{i.i.d}{\sim} D(\boldsymbol{\theta})$.
- Utilizar a distribuição de $\boldsymbol{S}$ pode ser bem complicado.

Estimação da média

- Utilizar a forma (2) e considerar a distribuição das variáveis $\boldsymbol{F} = (F_1, ..., F_N)^t$ (mais geral, ou seja, em princípio, os resultados se aplicam, independentemente da distribuição de $\boldsymbol{Y}$).
- Neste caso, F_i, $i = 1, .., N$ são variáveis aleatórias ($y_i, i = 1, 2, ..., N$ são variáveis não aleatórias). Esta abordagem leva a inferências aproximadas ("n" e "$N - n$" suficientemente grandes).
- Uma vantagem é que ela se aplica, em princípio, independentemente da forma da distribuição de $\boldsymbol{Y}$.

Estimação da média

- Resultados (link 1, link 2, link 3) (i.d. - identicamente distribuídas):
  1. $F_i \overset{i.d.}{\sim}$ binomial$(n, 1/N)$. Ou seja,

$$P(F_i = f_i) = \binom{n}{f_i} p^{f_i}(1-p)^{n-f_i} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n\}}(f_i)$$

  2. $(F_i, F_j) \overset{i.d.}{\sim}$ trinomial$(n, 1/N, 1/N)$ $(i \neq j)$, ou seja, os $F_i's$ são **dependentes** e:

$$\begin{aligned} P(F_i = f_i, F_j = f_j) &= \frac{n!}{f_i!f_j!(n-f_i-f_j)!} p_1^{f_i} p_2^{f_j}(1-p_1-p_2)^{n-f_i-f_j} \\ &\times \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n-f_j\}}(f_i)\mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n\}}(f_j) \end{aligned}$$

- Exercício: obtenha a distribuição de $(F_{k_1}, F_{k_2}, ..., F_{k_r})^t$, em que $\{k_1, k_2, ..., k_r\}$ é um subconjunto de $\{1, 2, ..., n\}$.
- Exercício: obtenha a distribuição de $(F_1, F_2, ..., F_N)^t$.

Estimação da média

- Prova (1): para um número n de repetições, repetimos um procedimento cujo a probabilidade de sucesso (selecionar o elemento i) é constante (1/N) e contabilizamos o número de sucessos.
- Prova (2): para um número n de repetições, repetimos um procedimento cujas probabilidades de interesse (selecionar os elmentos i e j, $i \neq j$) são constantes (1/N,1/N) e contabilizamos o número de ocorrências de cada categoria.

Propriedades dos F_i

1. $\mathcal{E}_{A_1}(F_i) = \frac{n}{N}, \mathcal{V}_{A_1}(F_i) = n\frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right) = n\frac{N-1}{N^2}$.
2. $Cov_{A_1}(F_i, F_j) = -n\frac{1}{N}\frac{1}{N} = -\frac{n}{N^2}$.
3. $\pi_i = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$ (probabilidade do i-ésimo elemento aparecer na amostra). Prova

$$\pi_i = 1 - P(F_i = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

4. $\pi_{ij} = \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n$ (probabilidade do i-ésimo e j-ésimo elementos aparecerem na amostra). Exercício: provar esta propriedade.

As provas dos resultados 1, 2 e 3 decorrem das respectivas distribuições de F_i e $(F_i, F_j)^t$.

Estimação da média : Propriedades do estimador sob AAS_c

- Valor esperado

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{A_1}(\widehat{\mu}) &= \frac{1}{n}\mathcal{E}_{A_1}\left(\sum_{i=1}^{N} F_i y_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\mathcal{E}_{A_1}(F_i)y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\frac{ny_i}{N} \\
&= \sum_{i=1}^{N}\frac{y_i}{N} = \mu
\end{aligned}
$$

- Portanto $\widehat{\mu}$ é uma estimador não viciado (env)

Estimação da média : Propriedades do estimador sob AAS_c

- Variância do estimador

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_{A_1}(\widehat{\mu}) &= \frac{1}{n^2}\mathcal{V}\left(\sum_{i=1}^{N} F_i y_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 \mathcal{V}_{A_1}(F_i) + \sum_{\substack{i\neq j,\\ i,j=1,2,\ldots,N}} Cov_{A_1}(F_i y_i, F_j y_j)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 \left(\frac{n(N-1)}{N^2}\right) - \sum_{\substack{i\neq j,\\ i,j=1,2,\ldots,N}} y_i y_j \frac{n}{N^2}\right) \\
&= \frac{1}{N^2 n}(N-1)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \frac{1}{N-1}\sum_{\substack{i\neq j,\\ i,j=1,2,\ldots,N}} y_i y_j\right)
\end{aligned}
$$

- Cont.

Lembrando que (Exercício) $\sum_{i\neq j} y_i y_j = -\sum_{i=1}^{N} y_i^2 + N^2\mu^2$ e $\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - N\mu^2$, vem que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_{A_1}(\widehat{\mu}) &= \frac{1}{N^2 n}(N-1)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \frac{1}{N-1}\left(N^2\mu^2 - \sum_{i=1}^{N} y_i^2\right)\right) \\
&= \frac{N-1}{(N-1)N^2 n}\left(N\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - N^2\mu^2 + \sum_{i=1}^{N} y_i^2\right) \\
&= \frac{1}{N^2 n}\left(N\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - N^2\mu^2\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \mu^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

Estimação da média : Propriedades do estimador sob AAS_c

- Resumidamente, $\mathcal{E}_{A_1}(\widehat{\mu}) = \mu$ e $\mathcal{V}_{A_1}(\widehat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n}$. Podemos provar, sob AAS_c, que $\widehat{\mu}$ é consistente.
- A distribuição exata de $\widehat{\mu}$ (sob A_1) é bastante complicada de ser obtida (média de uma combinação linear de um vetor aleatório com distribuição multinomial).
- Distribuição assintótica: note que em $\{F_i\}_{i \geq 1}$ os F_i's são identicamente distribuídos mas não independentes. O TCL padrão não se aplica.
- Estimativa: $\widetilde{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i \in \boldsymbol{s}} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} f_i y_i$.

Estimação da média : Propriedades do estimador sob AAS_c

- Discutiremos, com mais detalhes (mais a frente), como se obter os resultados assintóticos mas, por enquanto, sob certas condições, entre elas n e $N - n$ suficientemente grandes, temos que

$$\frac{\widehat{\mu} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \xrightarrow[\substack{n \to \infty, \\ N-n \to \infty}]{D} N(0,1) \qquad (4)$$

ou

$$\widehat{\mu} \approx N(\mu, \sigma^2/n), \text{para } n \text{ e } N - n \text{ suficientemente grandes.}$$

Problema: σ^2, quase sempre, é desconhecido. Faz-se necessário, portanto, considerar um estimador consistente (de preferência não viciado), para se poder usar o Teorema de Slutsky.

Estimação da média : Propriedades do estimador sob AAS_c

- Vamos considerar o seguinte estimador para σ^2

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \widehat{\mu}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{N} F_i\left(y_i - \widehat{\mu}\right)^2.$$

Note que (lembrando que $\sum_{i=1}^{N} y_i^2 = N\sigma^2 + N\mu^2$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{A_1}(\widehat{\sigma}^2) &= \frac{1}{n-1}\mathcal{E}_{A_1}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\widehat{\mu}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left[\mathcal{E}_{A_1}\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 F_i\right) - n\mathcal{E}_{A_1}(\widehat{\mu}^2)\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{N} y_i^2 \mathcal{E}_{A_1}(F_i) - n\mathcal{E}_{A_1}\left(\widehat{\mu}^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[N(\sigma^2 + \mu^2)\frac{n}{N} - n\left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[n\sigma^2 + n\mu^2 - n\mu^2 - \sigma^2\right] = \sigma^2
\end{aligned}$$

Estimação da média : Propriedades do estimador sob AAS_c

- A prova de sua consistência, i.e.,

$$\widehat{\sigma}^2 \xrightarrow[\substack{n\to\infty,\\ N-n\to\infty}]{P} \sigma^2 \tag{5}$$

  também será discutida mais à frente.

- Portanto, dos resultados (4) e (5), temos que

$$\frac{\widehat{\mu}-\mu}{\sqrt{\widehat{\sigma}^2/n}} = \frac{\widehat{\mu}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\frac{\sigma}{\widehat{\sigma}} \xrightarrow[\substack{n\to\infty,\\ N-n\to\infty}]{D} N(0,1)$$

  por Slutsky.

Intervalo de Confiança

- Estimativa da variância:

  $\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i\in \boldsymbol{s}}\left(y_i - \widetilde{\mu}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{N} f_i\left(y_i - \widetilde{\mu}\right)^2.$

- Assim, um intervalo de confiança (assintótico) com coeficiente de confiança de aproximadamente γ é dado por

$$IC(\mu,\gamma) \approx \left[\widehat{\mu} - z_{\gamma}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}^2}{n}};\widehat{\mu} + z_{\gamma}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}^2}{n}}\right]$$

  em que $P\left(Z \leq z_{\gamma}\right) = \frac{1+\gamma}{2}$ e $Z \sim N(0,1)$.

- Erro da estimativa: $z_{\gamma}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}^2}{n}}$.

Testes de Hipótese

- Hipóteses usuais (μ_0 conhecido)
  1. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$.
  2. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$.
  3. $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
- Estatística do teste $Z_t = \frac{\widehat{\mu}-\mu_0}{\widehat{\sigma}/\sqrt{n}}$, em que $\widehat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\sigma}^2}$.
- Sob H_0, vimos que $Z_t \approx N(0,1)$, para n e N-n suficientemente grandes.
- Defina $z_t = \frac{\widetilde{\mu}-\mu_0}{\widetilde{\sigma}/\sqrt{n}}$ o valor calculado da estatística do teste e z_c o(s) valor(es) crítico(s).
- Defina ainda $Z \sim N(0,1)$.

Testes de Hipótese

- Procedimento para testar o conjunto de hipóteses [1]
- Valor crítico
  - $P(Z \leq z_c | H_0) = \alpha$.
  - Se $z_t \leq z_c$ rejeita-se H_0, caso contrário, não se rejeita.
- p-valor (nível descritivo)
  - $p - valor = P(Z \leq z_t | H_0)$

Testes de Hipótese

- Procedimento para testar o conjunto de hipóteses [2]
- Valor crítico
  - $P(Z \geq z_c | H_0) = \alpha$.
  - Se $z_t \geq z_c$ rejeita-se H_0, caso contrário, não se rejeita.
- p-valor (nível descritivo)
  - $p - valor = P(Z \geq z_t | H_0)$

Testes de Hipótese

- Procedimento para testar o conjunto de hipóteses [3]
- Valor crítico
  - $P(Z \leq z_c | H_0) = \frac{1+\alpha}{2}$.
  - Se $|z_t| \geq z_c$ rejeita-se H_0, caso contrário, não se rejeita.
- p-valor (nível descritivo)
  - $p - valor = 2[1 - P(Z \leq |z_t| | H_0)]$.

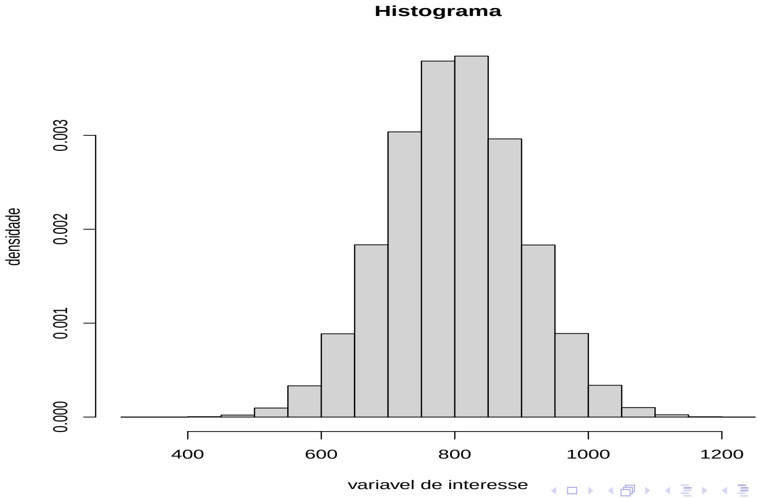
Estudos de simulação

- Distribuição assintótica do estimador para a média. Tamanho da população $N = 100.000$.
- Cinco cenários, variando em função da variável de interesse na população (X).
  - $X \sim N(800, 10.000)$
  - $X \sim \text{gama}(5; 0, 00625)$, $E(X) = 800, V(X) = 128.000$.
  - $X \sim t_{(7)}(800, 5.000)$, $E(X) = 800$, $V(X) = 7.000$.
  - $X \sim U[400; 1.200]$.
  - $X \sim 0, 5N(200, 5.000) + 0, 5N(600, 5.000)$

Estudos de simulação

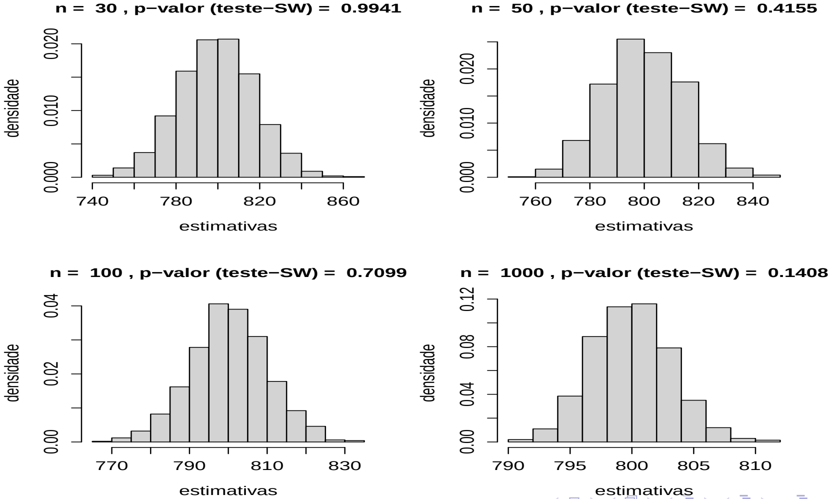
- Quatro tamanhos amostrais $(30, 50, 100, 1.000)$, em termos percentuais, com relação ao tamanho da população (0,03%,0,05%,0,1%,1%).
- Estudar a distribuição amostral (empírica) com base em R $=$ 1.000 réplicas (amostras selecionadas da população de interesse).

normal



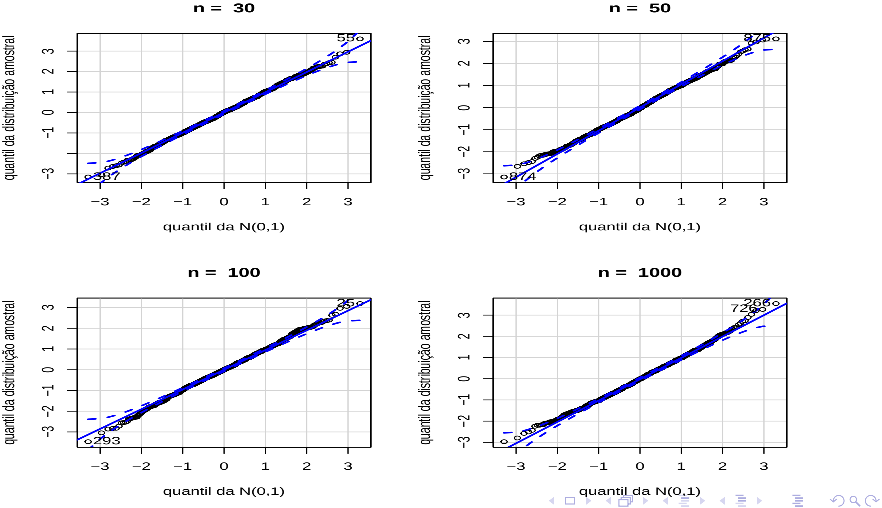
Histograma
densidade
0.000
0.001
0.002
0.003
400
600
800
1000
1200
variavel de interesse

normal



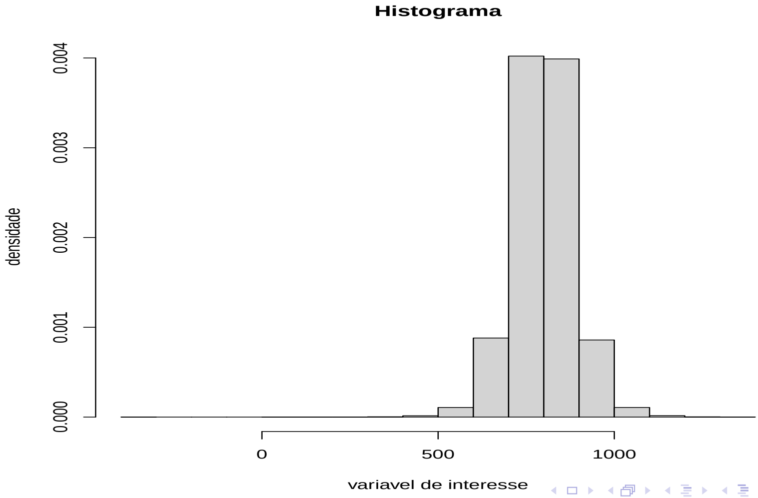
n = 30 , p−valor (teste−SW) = 0.9941
densidade
0.000
0.010
0.020
740
780
820
860
estimativas
n = 50 , p−valor (teste−SW) = 0.4155
densidade
0.000
0.010
0.020
760
780
800
820
840
estimativas
n = 100 , p−valor (teste−SW) = 0.7099
densidade
0.00
0.02
0.04
770
790
810
830
estimativas
n = 1000 , p−valor (teste−SW) = 0.1408
densidade
0.00
0.04
0.08
0.12
790
795
800
805
810
estimativas

normal

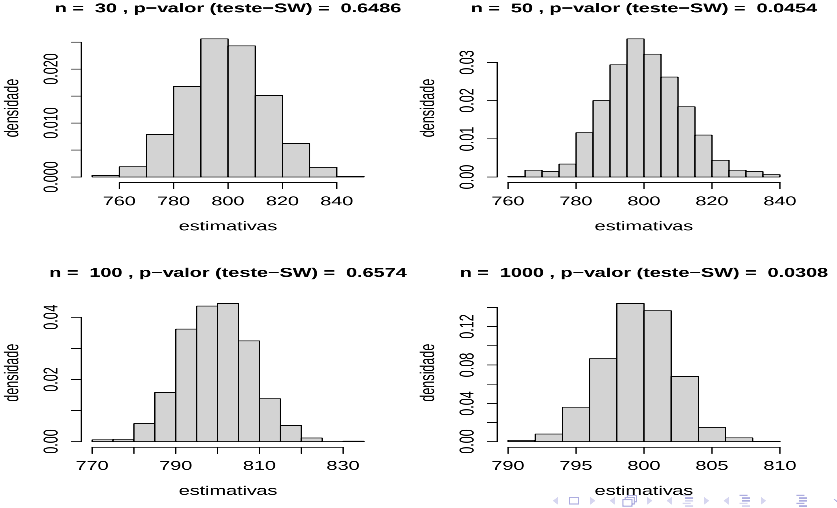


n = 30
n = 50
n = 100
n = 1000
quantil da distribuição amostral
quantil da N(0,1)

t de Student

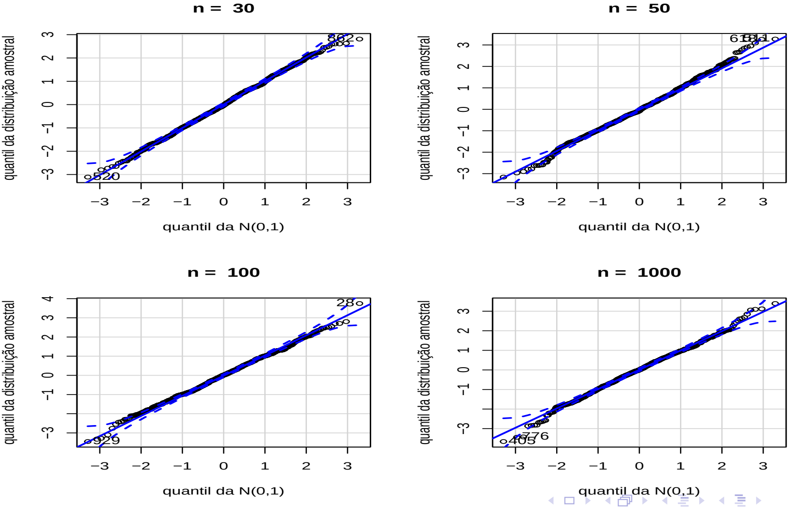

Histograma
densidade
0.000
0.001
0.002
0.003
0.004
0
500
1000
variavel de interesse

t de Student



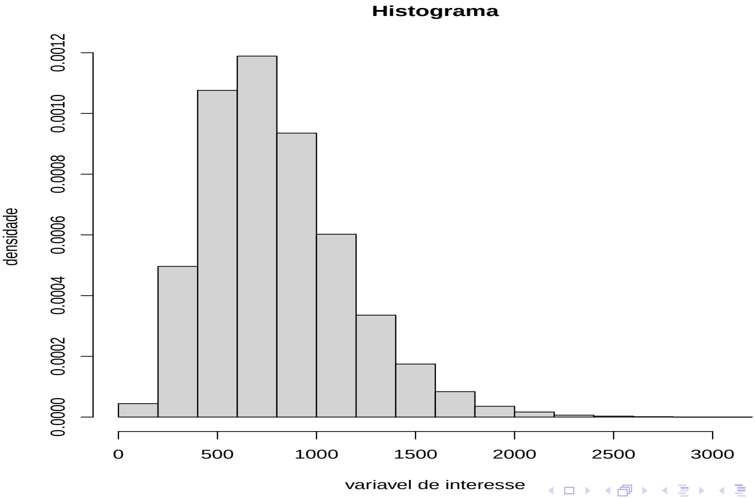
n = 30 , p−valor (teste−SW) = 0.6486
densidade
0.000
0.010
0.020
760
780
800
820
840
estimativas
n = 50 , p−valor (teste−SW) = 0.0454
densidade
0.00
0.01
0.02
0.03
760
780
800
820
840
estimativas
n = 100 , p−valor (teste−SW) = 0.6574
densidade
0.00
0.02
0.04
770
790
810
830
estimativas
n = 1000 , p−valor (teste−SW) = 0.0308
densidade
0.00
0.04
0.08
0.12
790
795
800
805
810
estimativas

normal



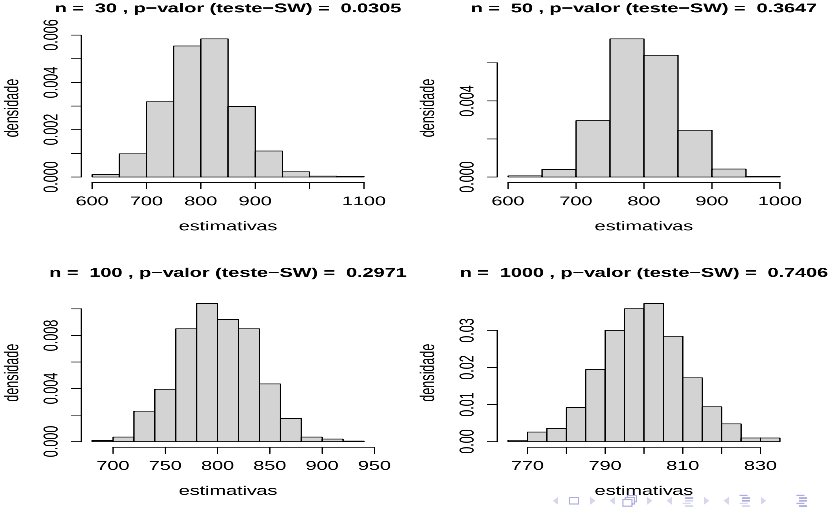
n = 30
n = 50
n = 100
n = 1000
quantil da distribuição amostral
quantil da N(0,1)
862
520
611
28
929
776
405

gama

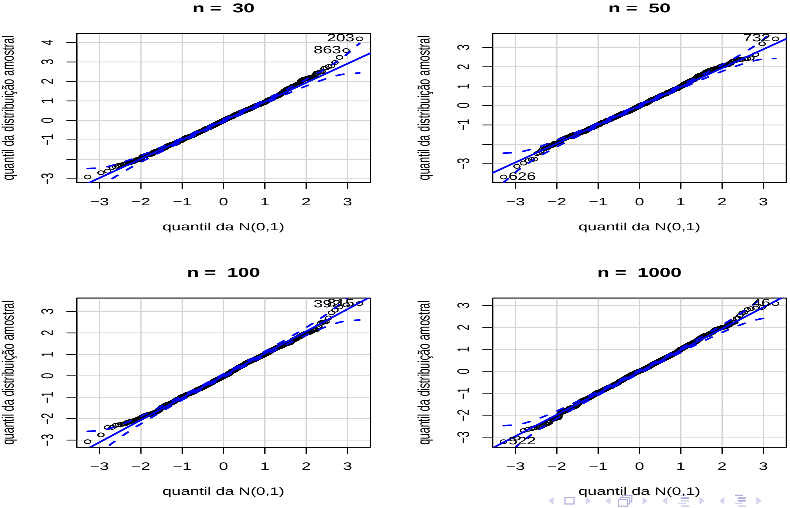


Histograma
densidade
0.0000
0.0002
0.0004
0.0006
0.0008
0.0010
0.0012
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
variavel de interesse

gama

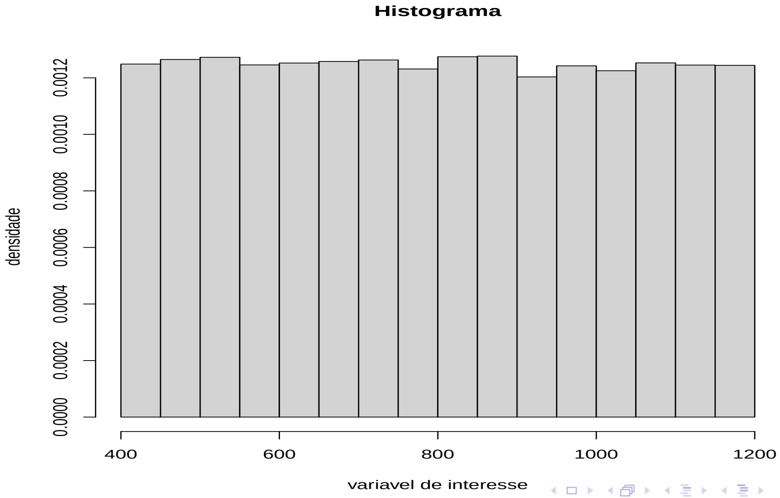

n = 30 , p−valor (teste−SW) = 0.0305
densidade
0.000
0.002
0.004
0.006
600
700
800
900
1100
estimativas
n = 50 , p−valor (teste−SW) = 0.3647
densidade
0.000
0.004
600
700
800
900
1000
estimativas
n = 100 , p−valor (teste−SW) = 0.2971
densidade
0.000
0.004
0.008
700
750
800
850
900
950
estimativas
n = 1000 , p−valor (teste−SW) = 0.7406
densidade
0.00
0.01
0.02
0.03
770
790
810
830
estimativas

normal

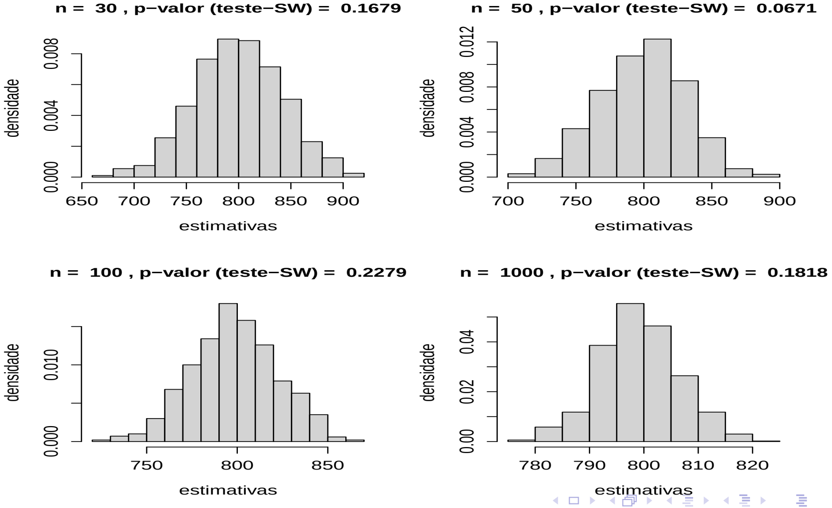


n = 30
n = 50
n = 100
n = 1000
quantil da distribuição amostral
quantil da N(0,1)
203
863
732
626
522
46

uniforme

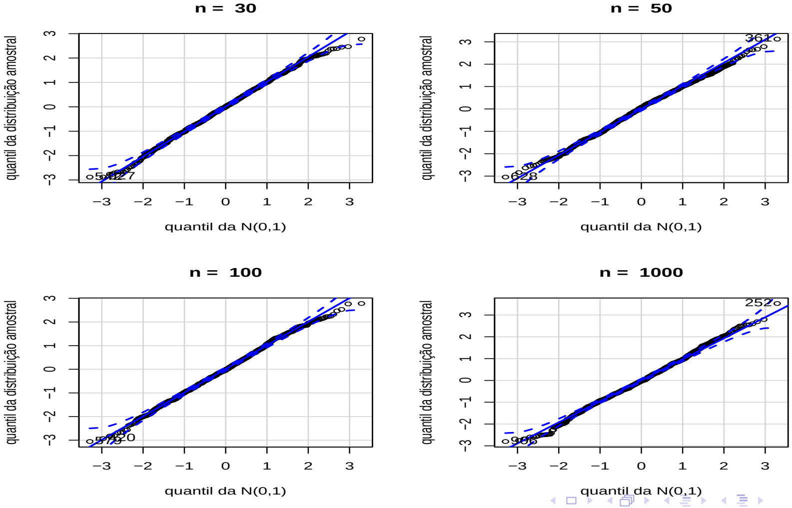

Histograma
densidade
0.0000
0.0002
0.0004
0.0006
0.0008
0.0010
0.0012
400
600
800
1000
1200
variavel de interesse

uniforme



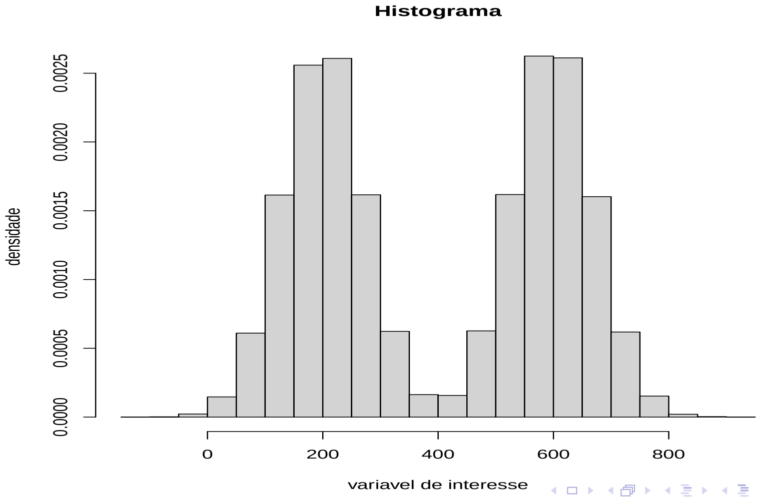
n = 30 , p−valor (teste−SW) = 0.1679
n = 50 , p−valor (teste−SW) = 0.0671
n = 100 , p−valor (teste−SW) = 0.2279
n = 1000 , p−valor (teste−SW) = 0.1818
densidade
estimativas
0.000
0.004
0.008
0.012
0.010
0.00
0.02
0.04
650
700
750
800
850
900
780
790
810
820

normal

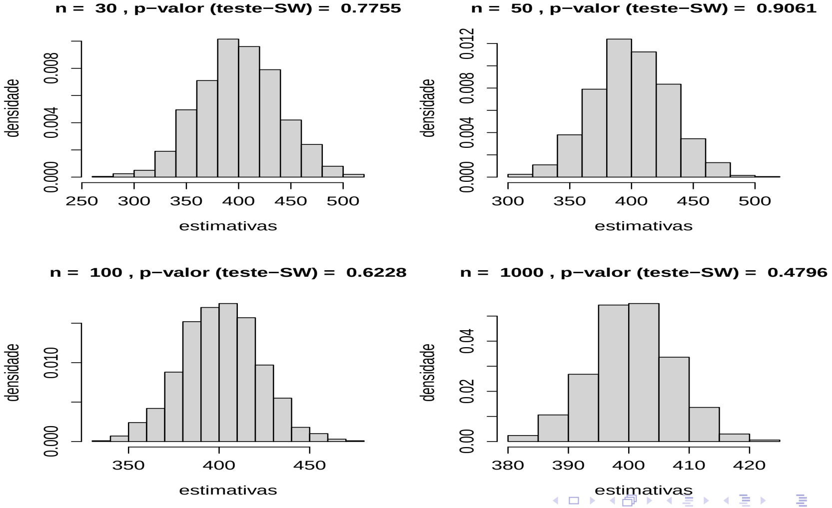


n = 30
n = 50
n = 100
n = 1000
quantil da distribuição amostral
quantil da N(0,1)

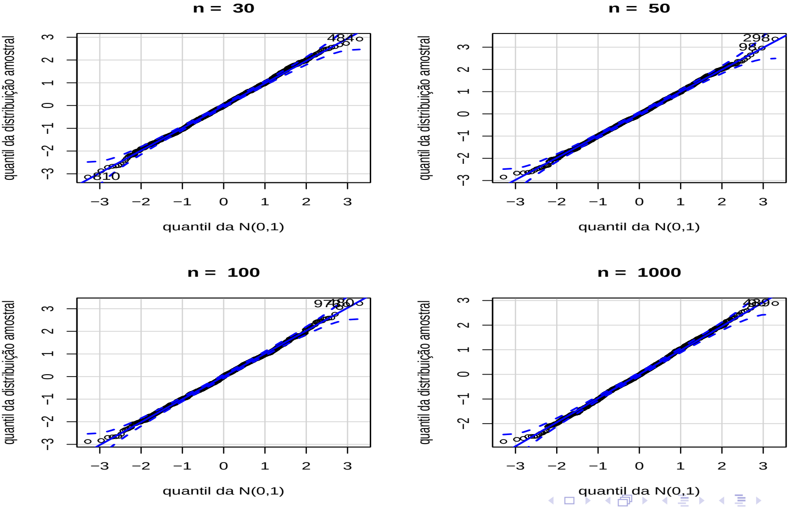
mistura de duas normais



mistura de duas normais



normal



n = 30
n = 50
n = 100
n = 1000
quantil da distribuição amostral
quantil da N(0,1)

Determinação do tamanho amostral

- Estabelece-se algum critério de interesse acerca da acurácia/precisão na estimativa da média populacional.
- Sob o estimador proposto, calcula-se o tamanho da amostra, com base em sua distribuição assintótica e critério estabelecido.
- Critérios:
  - Erro de estimativa: $z_{\gamma}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}^2}{n}}$. Fixa-se um erro de estimativa de interesse.
  - Precisão (Probabilidade do módulo da diferença): $P\left(|\widehat{\mu} - \mu| < \delta\right) > \gamma$, $\delta > 0$, $\gamma \in (0,1)$ (fixa-se δ).

Determinação do tamanho amostral: erro da estimativa

$$\delta = z_{\gamma}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \rightarrow n = \frac{z_{\gamma}^2\sigma^2}{\delta^2}$$

Em geral, o (um) valor de σ^2 é obtido através de pesquisas anteriores ou de uma amostra piloto, de tamanho apropriado.

Determinação do tamanho amostral: precisão

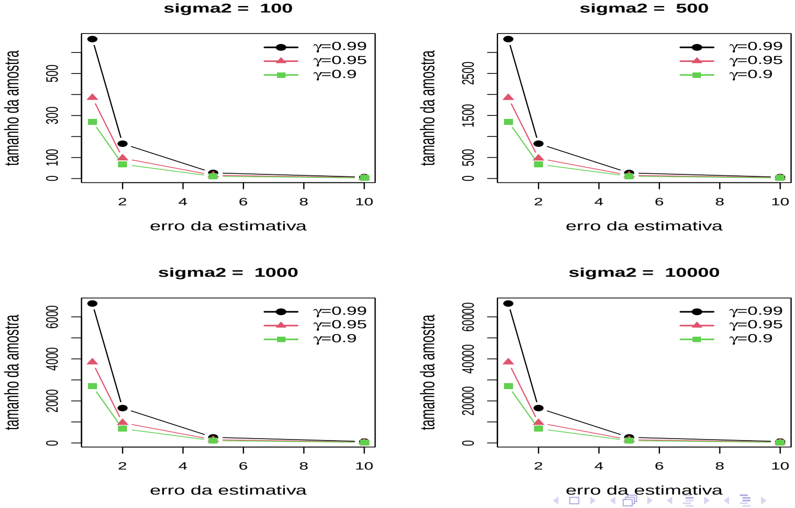
$$
\begin{aligned}
P_{A_1}\left(|\widehat{\mu} - \mu| < \delta\right) > \gamma & \leftrightarrow & P_{A_1}\left(\left|\frac{\widehat{\mu} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right| < \frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma}\right) > \gamma \\
& \leftrightarrow & P_{A_1}\left(|Z| < \frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma}\right) > \gamma \leftrightarrow \frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma} = z_\gamma
\end{aligned}
$$

em que $Z \approx N(0,1)$. O que leva ao mesmo procedimento oriundo de se fixar o erro da estimativa.

Tamanhos amostrais

- Situações hipotéticas: cruzamento entre os níveis de diferentes fatores de interesse
  - $\delta \in \{1, 2, 5, 10\}$.
  - $\gamma \in \{0,9; 0,95; 0,99\}$.
  - $\sigma^2 \in \{100, 500, 1.000, 10.000\}$.

Tamanhos amostrais



Estimação do total populacional

- $\tau = \sum_{i=1}^{N} y_i = N\mu$.
- Estimador "natural": $\widehat{\tau}_u = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Problema: se os y_i's foram positivos, $\widehat{\tau}_u$ sempre subestimará τ.
- Alternativa $\widehat{\tau} = N\widehat{\mu}$.
- Estimativa $\widetilde{\tau} = N\widetilde{\mu}$

Propriedades do estimador

- $\mathcal{E}_{A_1}(\widehat{\tau}) = \mathcal{E}_{A_1}(N\widehat{\mu}) = N\mathcal{E}(\widehat{\mu}) = N\mu = \tau$ (não viciado).
- $\mathcal{V}_{A_1}(\widehat{\tau}) = N^2\mathcal{V}_{A_1}(\widehat{\mu}) = N^2\frac{\sigma^2}{n}$ (a imprecisão associada à estimação do total é maior do que aquela associada à média).

Propriedades do estimador

- Normalidade assintótica, como

$$\frac{\widehat{\mu} - \mu}{\sqrt{\widehat{\sigma}^2/n}} \xrightarrow[\substack{n\to\infty,\\ N-n\to\infty}]{D} N(0,1),$$

lembrando que N é fixo, temos que

$$\frac{N\widehat{\mu} - N\mu}{\sqrt{N^2\widehat{\sigma}^2/n}} \xrightarrow[\substack{n\to\infty,\\ N-n\to\infty}]{D} N(0,1) \to \frac{\widehat{\tau} - \tau}{\sqrt{N^2\widehat{\sigma}^2/n}} \xrightarrow[\substack{n\to\infty,\\ N-n\to\infty}]{D} N(0,1)$$

Intervalo de Confiança

- Estimativa da variância:

  $\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i\in \boldsymbol{s}}(y_i - \widetilde{\mu})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{=1}^{N} f_i\,(y_i - \widetilde{\mu})^2.$

- Assim, um intervalo de confiança (assintótico) com coeficiente de confiança de aproximadamente γ é dado por

$$IC(\tau,\gamma) \approx \left[\widehat{\tau} - z_\gamma N\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}^2}{n}}; \widehat{\tau} + z_\gamma N\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}^2}{n}}\right]$$

  em que $P\left(Z \leq z_\gamma\right) = \frac{1+\gamma}{2}$ e $Z \sim N(0,1)$.

- Erro da estimativa: $z_\gamma N\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}^2}{n}}$.

Testes de Hipótese

- Hipóteses usuais (τ_0 conhecido)
  1. $H_0 : \tau = \tau_0$ vs $H_1 : \tau < \tau_0$.
  2. $H_0 : \tau = \tau_0$ vs $H_0 : \tau > \tau_0$.
  3. $H_0 : \tau = \tau_0$ vs $H_0 : \tau \neq \tau_0$.
- Estatística do teste $Z_t = \frac{\widehat{\tau}-\tau_0}{N\widehat{\sigma}/\sqrt{n}}$, em que $\widehat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\sigma}^2}$.
- Sob H_0, vimos que $Z_t \approx N(0,1)$, para n e N-n suficientemente grandes.
- Defina $z_t = \frac{\widetilde{\tau}-\tau_0}{N\widetilde{\sigma}/\sqrt{n}}$ o valor calculado da estatística do teste e z_c o(s) valor(es) crítico(s).
- Defina ainda $Z \sim N(0,1)$. Os procedimentos são análogos ao caso da média, com as devidas adaptações (Exercício).

Determinação do tamanho amostral: erro da estimativa

Analogamente ao caso da média populacional, temos que

$$\delta = z_\gamma N \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \rightarrow n = \frac{z_\gamma^2 N^2 \sigma^2}{\delta^2}$$

Isto vale para qualquer um dos dois critérios: erro da estimativa e precisão.