# Modelo Uniforme

- Dizemos que a v.a. $X$ tem distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$, $a < b$ se a f.d.p. (função densidade de probabilidade, ou densidade) $f_X$ é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ou $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$. Notação: $X \sim U[a, b]$ ou $X \sim U(a, b)$

- Exercício: provar que $f_x(.)$ é, de fato, uma densidade.

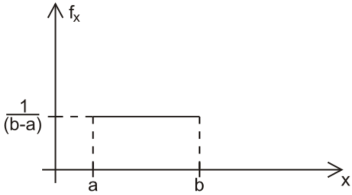
# Modelo Uniforme

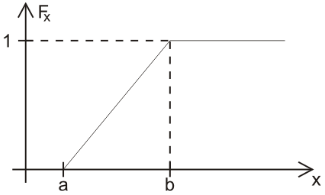
- Cálculo da f.d.a.:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \displaystyle\int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} t \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

# Modelo Uniforme

- Gráficos da f.d.p. e f.d.a.




No R dunif(x,min=a,max=b)(densidade), punif(x,min=a,max=b)(fda).

Simular um número aleatório (runif(n,min=a,max=b))

# Modelo Uniforme

- Cálculo da $E(X)$:

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

- Cálculo da $Var(X)$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_a^b x^2 \frac{1}{(b-a)} dx = \frac{1}{3(b-a)}\left[b^3 - a^3\right] = \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)} \\ &= \frac{(a^2+ab+b^2)}{3} \end{aligned}$$

# Modelo Uniforme

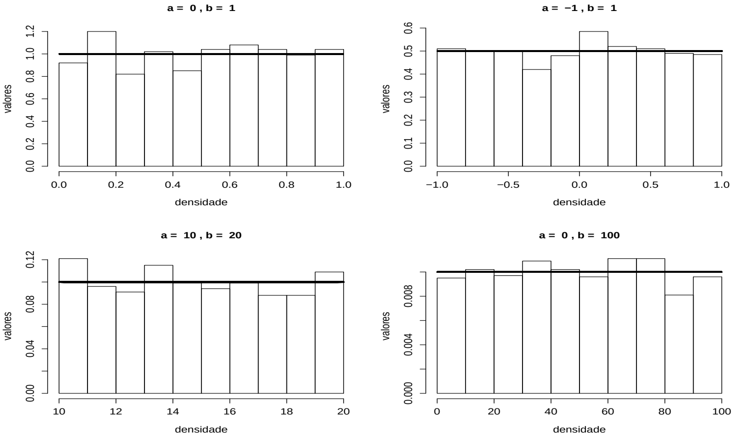
$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(a^2 + ab + b^2)}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} \\
&= \frac{(a^2 + ab + b^2)}{3} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

# Modelo Uniforme

- Exemplo: A temperatura $T$ de destilação do petróleo é crucial na determinação da qualidade final do produto. $T$ é considerada uma v.a. com distribuição $U[150°, 300°]$. Temos que

$$f_T(t) = \frac{1}{150} I(t), E(T) = 75, V(X) = 1875$$

# fdp (linha) e valores simulados (histograma): uniforme



# Modelo Exponencial

- Dizemos que uma v.a. $X$ possui distribuição exponencial com parâmetro $\lambda$ ($\lambda > 0$) se sua f.d.p. $f_X$ é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ou $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$. Notação: $X \sim exp(\lambda)$. Exercício: provar que, de fato, $f_x(.)$ é uma densidade.

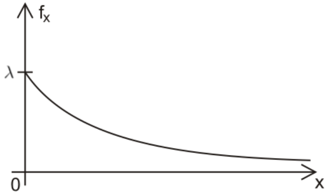
# Modelo Exponencial

- Cálculo da f.d.a. $(y = \lambda t)$:

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\lambda x} e^{-y} dy = -e^{-y}\Big|_0^{\lambda x} = 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

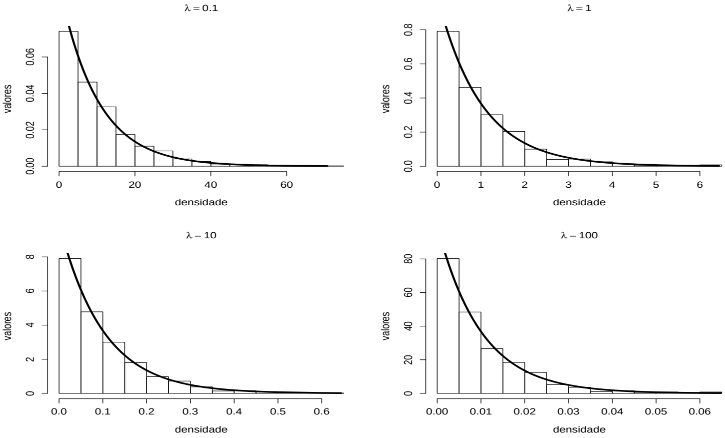
# Modelo Exponencial

- Gráfico da f.d.p.




No R: dexp(x,rate=lambda) (densidade), pexp(x,rate=lambda) (fda), rexp(n,rate=lambda) (gerar números aleatórios).

# fdp (linha) e valores simulados (histograma): exponencial



# Modelo Exponencial

- Introduzindo a função gama:

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} t^{u-1} e^{-t} dt, \quad u > 0$$

- Propriedades:
  - $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u)$
  - $\Gamma(n) = (n-1)! \quad , \forall \ n \in \mathbb{N}$
  - $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- Essa função tem um papel importante na modelagem estatística e auxilia nos cálculos de várias quantidades relacionadas a várias distribuições.

# Modelo Exponencial

- Cálculo da $E(X)$ (seja $u = x\lambda, x = \frac{u}{\lambda}, du = \lambda dx$):

$$E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty u^{2-1}e^{-u}du = \frac{1}{\lambda}\Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}$$

- Cálculo da $Var(X)$ (seja $u = x\lambda, x = \frac{u}{\lambda}, du = \lambda dx$):

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty u^{3-1}e^{-u}du = \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Logo

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

# Modelo Exponencial

- Exemplo: O tempo de vida (em horas) de um transistor é uma v.a. $T$ com distribuição $exp(\lambda)$ em que $\lambda = \frac{1}{500}$
  - $E(T) = 500$ horas
  - $P(T \geq 500) = \int_{500}^{\infty} f_T(t)dt = 0.3678$ (1-pexp(500,rate=1/500)) (EXERCÍCIO - verificar)

# Modelo Normal

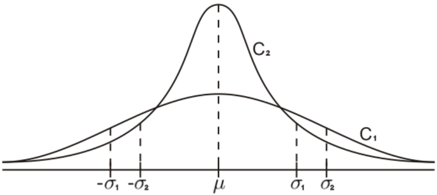
- Dizemos que uma v.a. $X$ possui distribuição normal com parâmetros $\mu$ e $\sigma^2$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$, se sua f.d.p., $f_X$ é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \qquad -\infty < x < \infty$$

- Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Devido à impossibilidade de calcular a f.d.a. analiticamente, recorre-se à tabela da **Normal Padrão** ($N(0,1)$)

# Modelo Normal

- Gráfico da f.d.p.




$E(X) = \mu$: representa o ponto de simetria de $f_X$

$Var(X) = \sigma^2$: representa a dispersão de $f_X$

# Modelo Normal

**Afirmação:** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se, e somente se $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Prova: Sabemos que $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$ (a volta fica como exercício). Por outro lado:

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z\right) = P(X \leq z\sigma + \mu) = F_X(z\sigma + \mu) \\
\rightarrow &\quad f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_X(z\sigma+\mu) = f_x(z\sigma+\mu)\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{z^2}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

# Modelo Normal

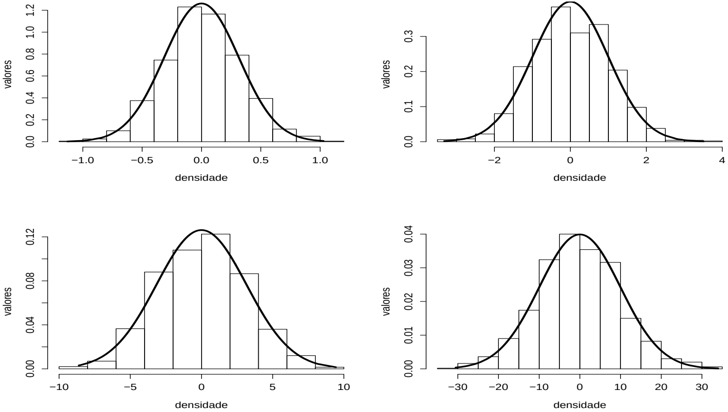
- $\Phi$ denota a f.d.a. da Normal padrão:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} dx$$

- Temos, que se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então:

$$F_X(a) = P(X \leq a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

# fdp (linha) e valores simulados (histograma): normal



# Densidade, esperança e variância

- Exercício: Provar que $f_X(x) > 0, \forall x$.
- Além disso, seja $f(.)$ uma função, então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, se $f(.)$ for uma função ímpar $(f(x) = -f(-x))$ e $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ se $f(.)$ for uma função par $(f(x) = f(-x))$.

# Densidade, esperança e variância

- Temos que $(z = \frac{x-\mu}{\sigma}, x = z\sigma + \mu, dx = \sigma dz)$,
  $(y = z^2/2, z = \sqrt{2y}, dy = zdz)$ e $f_X(.)$ é uma função par:

$$\begin{aligned}
\int_{\Re} f(x)dx &= \int_{\Re} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} y^{-1/2} e^{-y} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\Gamma(1/2)}_{\pi} = 1
\end{aligned}$$

# Densidade, esperança e variância

- E(X) e V(X). Note que se $X = \sigma Z + \mu$, em que $Z \sim N(0,1)$. Então

$$E(Z) = \int_{\Re} zf(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{z^2}{2}\right)} dz = 0$$

pois $zf(z)$ é uma função ímpar.

# Densidade, esperança e variância

Além disso ($y = z^2/2, y = \sqrt{2\pi}, dy = zdz$ e $z^2 f(z)$ é uma função par),

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \int_{\Re} z^2 f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{z^2}{2}\right)} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2}} y^{1/2} e^{-y} dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} y^{3/2-1} e^{-y} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = 1 \end{aligned}$$

Portanto, $E(X) = \sigma E(Z) + \mu = \mu$ e $V(X) = \sigma^2 V(Z) = \sigma^2$.

# Modelo Normal

- Exercitando com a tabela da Normal:
  - $\Phi(0.2) = 0.5793$ (pnorm(0.2, mean=0, sd=1))
  - $\Phi(0.45) = 0.6736$ (pnorm(0.45, mean=0, sd=1))
  - $\Phi(1.98) = 0.9761$ (pnorm(1.98, mean=0, sd=1))
  - $\Phi(-0.45) = 1 - \Phi(0.45) = 0.3264$ (pnorm(-0.45, mean=0, sd=1))

# Modelo Normal

**Exemplos**

- $Z \sim N(0,1)$
- $Y \sim N(4,2^2)$
  - $F_Y(6) = P(Y \leq 6) = P\left(\frac{Y-4}{2} \leq \frac{6-4}{2}\right) = P(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0.8413$ (pnorm(6,mean=4,sd=2))
  - $P(2 < Y \leq 6) = P\left(\frac{2-4}{2} < \frac{Y-4}{2} \leq \frac{6-4}{2}\right) = P(-1 < Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1 = 2(0.8413) - 1 = 0.6826$ (pnorm(6,mean=4,sd=2) - (pnorm(2,mean=4,sd=2)))

# Modelo Normal

- Exemplo: As alturas dos indivíduos de uma população têm distribuição Normal com média $\mu = 170cm$ e desvio padrão $\sigma = 5cm$, ou seja, $X \sim N(170, 5^2)$, calcule: $P(X \leq 182)$, $P(X \geq 167)$, $P(165 \leq X \leq 178)$, $P(X > x) = 0,8754$ No R pnorm(182,170,5) $=$ 0.9918, 1-pnorm(167,170,5) $=$ 0.7257, pnorm(178,170,5)-pnorm(165,170,5) $=$ 0.7865 e qnorm(0.1246,170,5) $=$ 164,24.

# Modelo Qui-Quadrado

- Dizemos que uma v.a $X$ tem distribuição qui-quadrado com $k$ (k $>$ 0) graus de liberdade, se sua f.d.p, $f_X$, é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x); (x > 0, k > 0).$$

- Notação: $X \sim \mathcal{X}^2_{(k)}$.
- Exercício: provar que, de fato, $f_X(.)$ é uma densidade.

# Modelo Qui-Quadrado

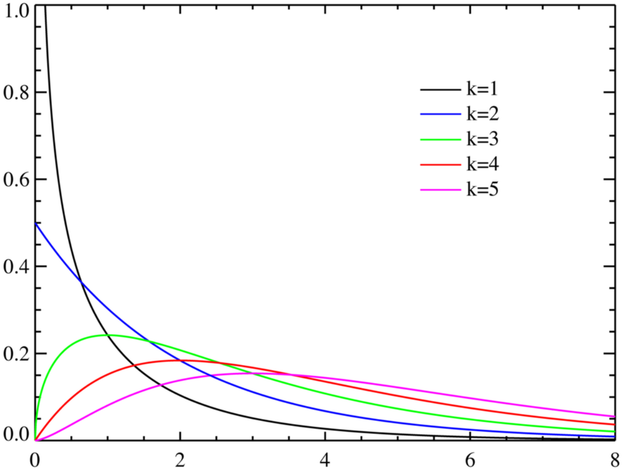
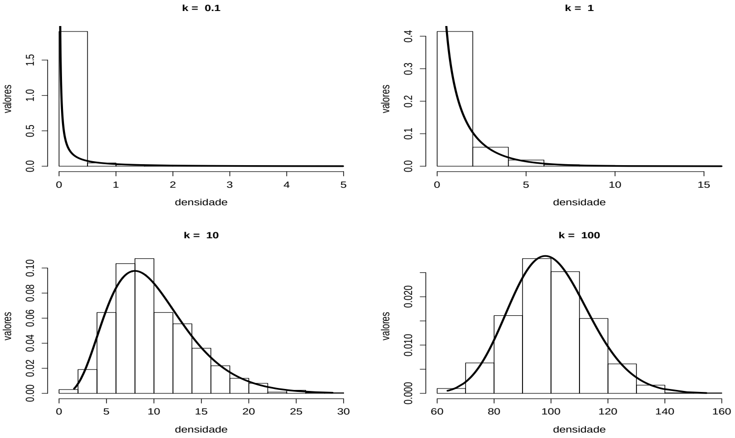



Figura: f.d.p para diferentes valores de $k$.

# fdp (linha) e valores simulados (histograma): qui-quadrado



# Modelo Qui-Quadrado

- Esperança e variância. Temos que $(y = x/2, x = 2y, 2dy = dx)$

$$
\begin{aligned}
E(X^r) &= \int_0^\infty \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{r+(k/2)-1} e^{-x/2} dx \\
&= \frac{2}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \int_0^\infty (2y)^{r+(k/2)-1} e^{-y} dy \\
&= \frac{2^r}{\Gamma(k/2)} \int_0^\infty y^{r+(k/2)-1} e^{-y} dy = 2^r \frac{\Gamma(r+k/2)}{\Gamma(k/2)}
\end{aligned}
$$

Então, $E(X) = 2\dfrac{\Gamma(1+k/2)}{\Gamma(k/2)} = 2(k/2)\dfrac{\Gamma(k/2)}{\Gamma(k/2)} = k.$

# Modelo Qui-Quadrado

- Além disso,

$$E(X^2) = 2^2 \frac{\Gamma(2 + k/2)}{\Gamma(k/2)} = 4(1 + k/2)(k/2) \frac{\Gamma(k/2)}{\Gamma(k/2)} = (2 + k)k$$

.

- Portanto $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 2k + k^2 - k^2 = 2k$. A fda não possui forma analítica (é preciso utilizar uma tabela apropriada).

- **Propriedades:** Se $X \sim N(0, 1)$, então $X^2 \sim \mathcal{X}^2_{(1)}$.

$$\text{Se } X_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, 1), \text{ então } \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \mathcal{X}^2_{(n)}.$$

# Modelo Qui-Quadrado

- Exercitando com a tabela da qui-quadrado:
  - Se $X \sim \mathcal{X}^2_{(10)}$, $P(X > 2,558) = 0,99$ (1-pchisq(2.558,df=10)) e $P(X > 18,307) = 0,05$ (1-pchisq(18.307,df=10))
  - Se $X \sim \mathcal{X}^2_{(30)}$, $P(X > 40,256) = 0,10$ (1-pchisq(40.256,df=30))
  - Se $X \sim \mathcal{X}^2_{(5)}$, qual o valor de $x_0$ cuja $P(X \leq x_0) = 0,975$?

    **R.** $x_0 = 12,833$ (qchisq(0.975,df=5))
  - Se $X \sim \mathcal{X}^2_{(3)}$, qual o valor de $x_0$ cuja $P(X < x_0) = 0,95$?

    **R.** $x_0 = 7,815$ (qchisq(0.95,df=3))

# Modelo t-Student

- Dizemos que uma v.a $X$ tem distribuição t-Student com $\nu, (\nu > 0)$ graus de liberdade, se sua f.d.p, $f_X$, é dada por:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{(\nu+1)/2} \mathbb{1}_{(-\infty,\infty)}(x); (x \in (-\infty,\infty), \nu > 0).$$

- Notação: $X \sim t_{(\nu)}$.
- Origem. Seja $Y \sim N(0,1)$ e $W \sim \chi^2_\nu$, $Y \perp W$, então $X = \dfrac{Y}{\sqrt{W/k}}$.

# Modelo t-Student

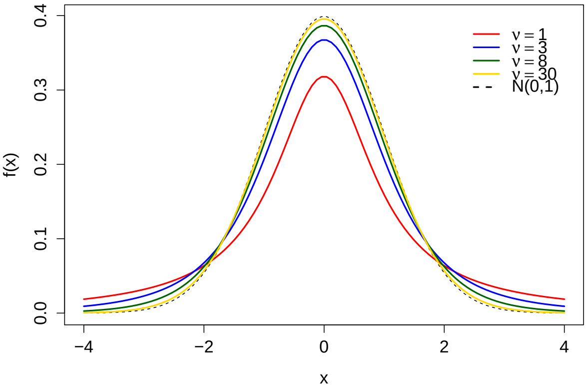
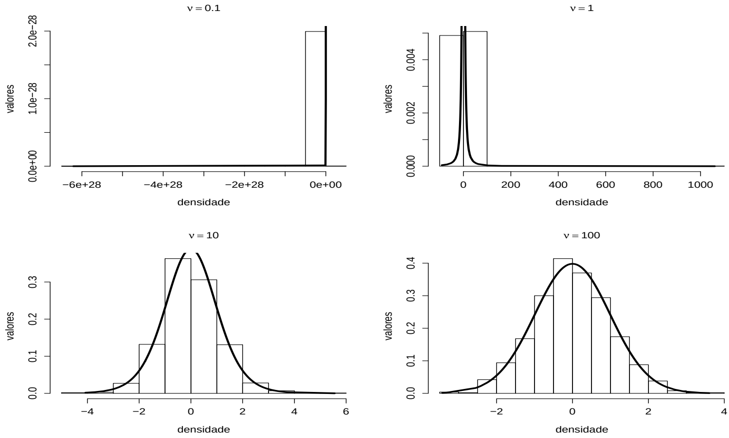



Figura: f.d.p para diferentes valores de $\nu$.

# fdp (linha) e valores simulados (histograma): t de Student



# Modelo t-Student

- Valor esperado:

$$E(X) = E\left(\frac{Y}{\sqrt{W/\nu}}\right) = \sqrt{\nu}E(Y)E(W^{-1/2}) = 0$$

- Variância: $E(X^2) = \nu E(Y^2)E(W^{-1}) = \nu \times 1 \times \frac{2}{\nu-2}$. Logo

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{\nu}{\nu-2}, \nu > 2$$

OBS: para calcular $E(W^{-1/2}), E(W^{-1})$ use a fórmula da $E(X^r)$, em que $X \sim \chi^2_{(\nu)}$.

# Modelo t-Student

- Exercitando com a tabela da t-Student:

  - Se $X \sim t_{(6)}$, $P(X > 2,447) = 0,025$ (1-pt(2.447,df=6)) e $P(-1,943 < X < 1,943) = 0,90$ (pt(1.943,df=6)- pt(-1.943,df=6)

  - Se $X \sim t_{(11)}$, qual o valor de $x_0$ cuja $P(X < x_0) = 0,75$?
    **R.** $x_0 = 0,697$ (qt(0.75,df=11))

  - Se $X \sim t_{(20)}$, qual o valor de $x_0$ cuja $P(X > x_0) = 0,10$?
    **R.** $x_0 = 1,325$ (qt(0.90,df=20))

# Modelo F de Snedecor

- Dizemos que uma v.a $X$ tem distribuição F de Snedecor com $m$ e $n$ graus de liberdade se sua f.d.p, $f_X$, é dada por:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left[\left(\frac{m}{n}\right)x+1\right]^{\frac{m+n}{2}}}; \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)(x>0, m, n>0).$$

- Notação: $X \sim \mathcal{F}(m,n)$.
- Sejam $Y \sim \chi^2_m$ e $W \sim \chi^2_n$, $Y \perp W$, então $X = \frac{Y/m}{W/n}$.

# Modelo F de Snedecor

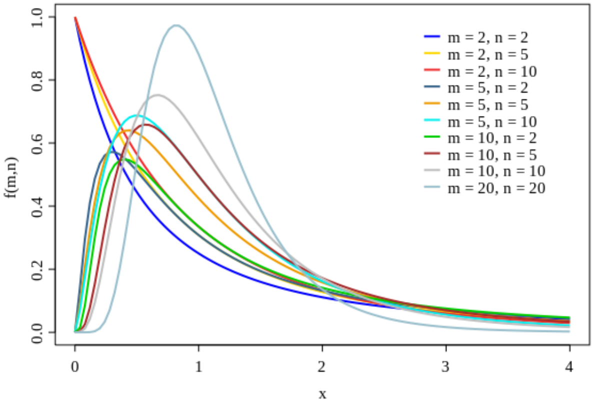
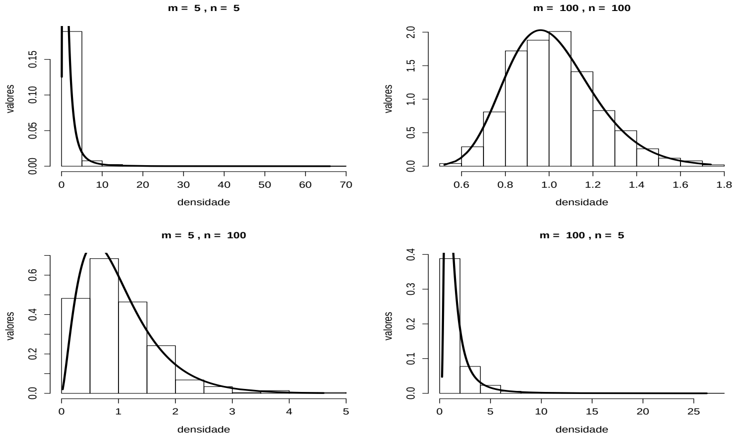



Figura: f.d.p para diferentes valores de $m$ e $n$.

# fdp (linha) e valores simulados (histograma): F de Snedcor



# Modelo F de Snedecor

- Valor esperado: $E(X) = \frac{n}{m}E(Y)E(W^{-1}) = \frac{n}{m}m\frac{1}{n-2} = \frac{n}{n-2}$

- Variância:

  $E(X^2) = \frac{n^2}{m^2}E(Y^2)E(W^{-2}) = \frac{n^2}{m^2}(2+m)m\frac{1}{(n-2)(n-4)} = \frac{n^2}{m}\frac{(2+m)}{(n-2)(n-4)}$.

  Assim,

$$V(X) = \frac{n^2}{m}\frac{(2+m)}{(n-2)(n-4)} - \frac{n^2}{(n-2)^2} = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, n > 4$$

# Modelo F de Snedecor

- **Observação:** Em geral, as tabelas contém apenas os quantis da cauda superior ($\mathcal{F}(\alpha, m, n)$, $P(X \leq \mathcal{F}(\alpha, m, n)) = \alpha$, $X \sim \mathcal{F}(\alpha, m, n)$, para $\alpha \geq 0,90$). Os quantis da cauda inferior $\mathcal{F}(1-\alpha, m, n)$ podem ser obtidos a partir da seguinte relação:

$$\mathcal{F}(1-\alpha, m, n) = \frac{1}{\mathcal{F}(\alpha, n, m)}.$$

# Modelo F de Snedecor

- Exercitando com a tabela da F de Snedecor:
  - Se $X \sim \mathcal{F}(5,7)$, $P(X > 3,97) = 0,05$ (1-pf(3.97,df1=5, df2=7)) ou então $P(X \leq 3,97) = 0,95$ (pf(3.97,5,7))
  - Se $X \sim \mathcal{F}(3,8)$, $P(X < 7,59) = 0,99$ (pf(7.59,3,8))
  - Se $X \sim \mathcal{F}(5,7)$, qual o valor de $f_0$ cuja $P(X < f_0) = 0,05$?
    **R.** $0,05 = P(\mathcal{F}(5,7) < f_0) = P[1/\mathcal{F}(7,5) < f_0] = P[\mathcal{F}(7,5) > 1/f_0]$. Consultando a tabela, obtemos que $1/f_0 = 4,88$ e, portanto, $f_0 = 0,205$(qf(0.05,5,7)).