Vetores aleatórios bivariados

- Um vetor aleatório bivariado é uma função que associa cada valor do espaço amostral Ω a um vetor no $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Em outras palavras um vetor aleatório $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ é um vetor cujas componentes são variáveis aleatórias.
- Notação: Letras maiúsculas para cada componente do vetor aleatório: $(X, Y), (Z, W)$ etc. Letras minúsculas, (valor assumido pelo vetor aleatório), $(x, y), (z, w)$ etc. Vetores aleatórios serão denotados por letras em negrito.
- Observação 1: Cada componente de uma variável aleatória bivariada é uma variável aleatória univariada, definidas no mesmo espaço amostral Ω.

Exemplo: Seleção de n componentes eletrônicos

- Experimento: medir a quantidade de itens defeiutosos e bons, em uma linha de produção. Notação: $D = \textit{defeituoso}$, $B = \textit{bom}$.
- $\Omega = \{D, B\}^n = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2^n}) : \omega_i = D, B,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$
- Defina, X: número de componentes eletrónicos defeituosos e Y: número de componentes eletrónicos bons.

  Notação: $(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$
- Se $n = 2$, temos então $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \omega_4\}$

$$\omega_1 = (B, B), \omega_2 = (D, B), \omega_3 = (B, D), \omega_4 = (D, D).$$

$$(X, Y)(\omega_1) = (0, 2);\ (X, Y)(\omega_2) = (1, 1)$$

$$(X, Y)(\omega_3) = (1, 1);\ (X, Y)(\omega_4) = (2, 0)$$

Vetores aleatórios bivariados discretos

- Um vetor aleatório bidimensional é discreto se e somente se suas componentes são variáveis aleatórias discretas.
- Voltando ao exemplo dos componentes eletrónicos, vemos que $\boldsymbol{Z} = (X, Y)'$ é um vetor aleatório discreto.
- Num jogo de tênis entre João e Maria, defina X e Y como sendo o número de sets ganhos pelo João e Maria, respectivamente. Então $\boldsymbol{Z} = (X, Y)'$ é um vetor aleatório discreto.

Distribuição de probabilidade conjunta: Caso discreto

- Experimento: Suponha que 3 bolas são selecionadas aleatoriamente (sem reposição e ao mesmo tempo) de uma caixa que contém 3 vermelhas, 4 brancas e 5 azuis. Assuma que X e Y denotam, respectivamente, o número de bolas vermelhas e brancas selecionadas.
- Denotamos por $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ a probabilidade de X assumir o valor x e Y assumir o valor y (função de probabilidade conjunta) (fdp conjunta).
- Vemos que $x, y \in \{0, 1, 2, 3\}$ tais que $x + y \leq 3$.

- Temos que a fdp conjunta é dada por: $p(x,y) =$
$$\begin{cases} \frac{\binom{3}{x}\binom{4}{y}\binom{5}{3-(x+y)}}{\binom{12}{3}}, & x, y \in \{0,1,2,3\}; x+y \leq 3 \\ 0, & \text{caso} \quad \text{contrário} \end{cases}$$
- Podemos verificar (verifique!) que a função $p : A \rightarrow [0,1]$ definida acima, em que $A = \{x, y \in \{0,1,2,3\}; x+y \leq 3\}$, satisfaz as seguintes condições:
    - $0 \leq p(x,y) \leq 1$ para todo x, y
    - $\sum_y \sum_x p(x,y) = 1$
- Uma função satisfazendo as duas condições acima, é dita função de probabilidade conjunta para o vetor aleatório (X, Y).
- Assim a função p atribui a cada valor do vetor aleatório (X, Y) sua probabilidade de ocorrência.

Distribuições marginais

- De posse da fds conjunta podemos obter as fdp's de cada variável (chamadas de distribuições ou fdp marginais).
- Exemplo: Seja (X, Z) o vetor aleatório definido por X : satisfação de um expectador com a última temporada de The Walking Dead e Z : o número de temporadas assistidas pelo expectador. Suponha que X pode assumir os valores 1, 2, 3 ou 4, que representam da menor ao maior nível de satisfação,. Além disso, seja Y assumindo o valor de 0 se o espetador assistiu menos de 5 temporadas ($Z < 5$) ou 1 em outro caso ($Z \geq 5$).

- Suponha que a tabela a seguir da a função de probabilidade conjunta $p(x, y)$ de X e Y.

Y / X	1	2	3	4	$p_Y(y)$
0	$7/100$	$17/100$	$23/100$	$5/100$	$52/100$
1	$4/100$	$14/100$	$23/100$	$7/100$	$48/100$
$p_X(x)$	$11/100$	$31/100$	$46/100$	$12/100$	1

Tabela 1: Distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y)

- As funções definidas por $p_X(x) = P(X = x)$, $x = 1, 2, 3, 4$ e $p_Y(y) = P(Y = y)$, $y = 0, 1$ são chamadas de *distribuições marginais*.
- Pelo teorema da probabilidade total vemos facilmente que $p_X(x) = \sum_{y=0}^{1} p(x, y)$ e $p_Y(y) = \sum_{x=1}^{4} p(x, y)$.

- Observamos que a distribuição marginal de uma variável é obtida somando-se as probabilidades conjuntas, sob todos os valores possíveis da outra variável.
- Por exemplo, a probabilidade de que um expectador escolhido ao acaso tenha assistido pelo menos 5 temporadas do seriado é $p_Y(1) = 48/100 = 0,48$, enquanto que a probabilidade de que um expectador escolhido ao acaso tenha dado um nível de satisfação de 3 é $p_X(3) = 46/100 = 0,46$.

Distribuições Condicionais

- Às vezes, é conveniente calcular proporções em relação a uma linha ou uma coluna, e não em relação ao total. Por exemplo, qual seria a distribuição do nível de satisfação de um espetador, sabendo-se que ele assistiu menos de 5 temporadas de The Walking Dead?
- Ou seja, queremos calcular $P(X = x|Y = 0)$. De acordo com a definição de probabilidade condicional, obtemos:

$$P(X = x|Y = 0) = \frac{P(X = x, Y = 0)}{P(Y = 0)}$$

- Pela Tabela 1 obtemos, por exemplo, que

$$P(X = 4|Y = 0) = \frac{0,05}{0,52} = 5/52 \approx 0,097$$

- Portanto, aproximadamente 10% dos espetadores que assistiram menos de 5 temporadas tiveram a mais alta satisfação com a última temporada.
- Em geral, definimos a probabilidade condicional de $\{X = x\}$ dado $\{Y = y\}$, como $p(x|y) = \dfrac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$, para todo x.

- As distribuições $P(X = x|Y = y) = \dfrac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$ e $P(Y = y|X = x) = \dfrac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$ são as dsitribuições de X dado Y=y e de Y dado X=x, respectivamente.
- Exercício: obter as distribuições condicionais acima, para cada valor de x e de y.

Esperança de funções de um vetor aleatório: Caso discreto

- Seja g uma função de um vetor aleatório (X, Y) com função de probabilidade $p(x, y)$ a esperança ou média de $g(X, Y)$, é definida por $E(g(X, Y)) = \sum_x \sum_y g(x, y)p(x, y)$
- Exemplo: Suponha que são lançados dois dados honestos (um verde e outro vermelho). Sejam X e Y variáveis aleatórias que representam o número obtido no dado verde e Y o número obtido no dado vermelho. Calcule $E(X + Y)$.
- Já que $p(x, y) = 1/36,\ x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e $\sum_{x=1}^{n} x = n(n + 1)/2$, $E(X + Y) = \sum_{x=1}^{6} \sum_{y=1}^{6} (x + y)/36 = 7$.

Esperança Condicional

- Assim, como foi definida a probabilidade condicional de um determinado evento dado a ocorrência de outro, podemos introduzir a definição de esperança condicional de uma variável dado um valor da outra.
- Voltemos ao exemplo da Tabela 1, então o número médio de nível de satisfação quando os espetadores assistiram pelo menos de 5 temporadas é

$$E(X|Y=0)=\sum_{x=1}^{4} xp(x|0).$$

- A seguinte tabela resume a distribuição condicional de X dado $Y = 0$

x	1	2	3	4
$p(x\|0)$	$7/52$	$17/52$	$23/52$	$5/52$

Tabela 2: Distribuição condicional do nível de satisfação com a última temporada de um expectador de *The Walking Dead* dado que ele assistiu pelo menos de 5 temporadas.

- Logo, a satisfação média de um espetador com a última temporada de *The Walking Dead* quando ele assistiu pelo menos de 5 temporadas é

$$E(X|Y=0) = (1)(7/52)+(2)(17/52)+(3)(23/52)+(4)(5/52) = 2,5.$$

- Observação: Ao definirmos $h(y) = E(X|Y=y)$, vemos que a esperança condicional de X dado $Y=y$ é uma função de y. Portanto $E(X|Y)$ é uma variável aleatória.

Covariância entre duas variáveis aleatórias: Caso Discreto

- Introduzimos agora uma medida da associação (linear) entre um par de variáveis aleatórias (v.a's).
- Se X e Y são duas v.a's, a covariância entre elas é definida por

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

- Após fazer (faça-os!) uns simples cálculos obtemos que $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
- Consideremos X e Y v.a's discreta com valores em Ω_X e Ω_Y então

$$Cov(X,Y) = \sum_{x\in\Omega_X}\sum_{y\in\Omega_Y} xyp(x,y) - \sum_{x\in\Omega_X} xp_X(x)\sum_{y\in\Omega_y} yp_Y(y)$$

- Voltemos ao exemplo da Tabela 1, temos que:

$$\begin{aligned} E(X) &= 1*(11/100)+2*(31/100)+3*(46/100)+4*(12/100) \\ &= 259/100 \\ E(Y) &= 0*(52/100)+1*(48/100) = 48/100, \\ E(XY) &= 1*(4/100)+2*(14/100)+3*(23/100)+4(7/100) \\ &= 129/100, \end{aligned}$$

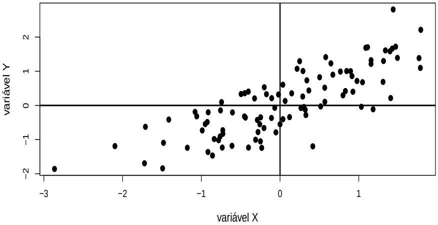
donde se depreende que $Cov(X,Y) = 129/100-(259/100)(48/100) = 468/10000 = 0,0468$.

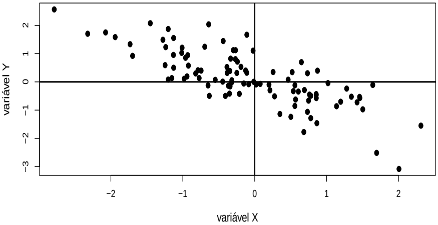
- Neste caso, temos que $Cov(X,Y) \geq 0$. Caso $Cov(X,Y) = 0$, dizemos que X e Y são não correlacionadas.

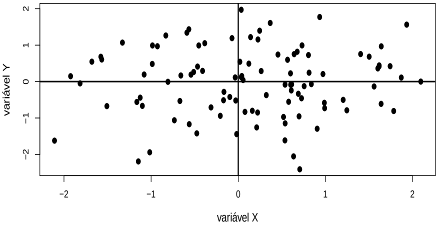
- Correlação: mede o grau de associação linear.
- Definição (seja $E(X) = \mu_X, E(Y) = \mu_Y$, $DP(X) = \sigma_X$, $DP(Y) = \sigma_Y$):

$$
\begin{aligned}
\text{Corre}(X, Y) &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{DP(X)DP(Y)} = E\left[\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right] \\
&= E(ZW) = \sum_{z,w} zwP(Z = z, W = w) \\
&= \sum_{z,w} zwP(Z = z | W = w)P(W = w) \\
&= \sum_{z,w} zwP(W = w | Z = z)P(Z = z)
\end{aligned}
$$

em que $Z = \left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)$ e $W = \left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$.


variável Y
variável X
−3 −2 −1 0 1
−2 −1 0 1 2


variável Y
variável X
−2 −1 0 1 2
−3 −2 −1 0 1 2


variável Y
variável X
−2 −1 0 1 2
−2 −1 0 1 2

Coeficiente de Correlação

- Propriedades:
  - $-1 \leq Corr(X, Y) \leq 1$
  - $Corr(X, Y)$ estiver próxima de 1: X e Y estão positivamente associados e o tipo de associação entre as variáveis é linear
  - $Corr(X, Y)$ estiver próxima de -1: X e Y estão negativamente associados e o tipo de associação entre as variáveis é linear
  - $Corre(X, Y)$ estiver próxima de 0: X e Y têm uma associação linear, praticamente, nula.

Voltando ao Exemplo da Tabela 1

- $E(X^2) = 1^2 \frac{11}{100} + 2^2 \frac{31}{100} + 3^2 \frac{46}{100} + 4^2 \frac{12}{100} = \frac{741}{100}$.
- $V(X) = \frac{741}{100} - \left(\frac{259}{100}\right)^2 = \frac{74100-67081}{10000} = \frac{7019}{10000}$.
- $V(Y) = \frac{48}{100} - \left(\frac{48}{100}\right)^2 = \frac{480000-2304}{10000} = \frac{477696}{10000}$.
- $Corre(X, Y) = \frac{468/10000}{\sqrt{\frac{7019}{10000} \frac{477696}{10000}}} = 0,0014.$
- A correlação entre X e Y é, praticamente, nula.

Independência de variáveis aleatórias

- Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas com função de probabilidade conjunta $p(x,y)$, dizemos que X e Y são independentes se e somente se

$$p(x,y) = p_X(x)p_Y(y), \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad x, y.$$

- No exemplo na Tabela 1, temos que $4/100 = p(1,1) \neq p_X(1)p_Y(1) = 528/10000$. Portanto X e Y não são independentes.

Independência de variáveis aleatórias

- Observação: Em geral, covariância nula *não* implica em independência (a recíproca é verdadeiramente).
- Exemplo: Seja $p(x, y) = 1/8$, $x, y \in \{-1, 0, 1\}$, temos que $E(X) = E(Y) = E(XY) = 0$, e, portanto, $Cov(X, Y) = 0$. Contudo $p(1, 1) \neq p_X(1)p_Y(1)$.

O modelo trinomial

- Suponha que um continente chamado de *Westeros* é composto por 7 reinos (casas): Stark, Targaryen, Lannister, Baratheon, Greyjoy, Arryn, e Tully que servem a um único rei sentado no Trono de ferro. Além disso, suponha que foram divididos em três grupos: Targaryen, Lannister e Outros (Composto pelos 5 restantes) de tal forma que a distribuição de cada grupo é dada a seguir

Grupo	proporção
Targaryen	20%
Lannister	15%
Outros	65%

- Suponha que uma comissão de 12 membros é escolhido de *Westeros* para decidir quem deveria ocupar o Trono de ferro de tal forma que cada residente é escolhido independentemente de qualquer outro residente.
- Qual a probabilidade de que a comissão contenha 3 membros da casa Targaryen, 2 da casa Lannister, e 7 outros membros?.
- Seja (X, Y) um vetor aleatório definido por X : número de membros da casa Targaryen, Y : número de membros da casa Lannister.

- Denotamos por $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$. Então

$$p(x, y, z) = \frac{12!}{3!2!7!}(20/100)^3(15/100)^2(65/100)^7 = 699/10000 = 0,0699.$$

- Dizemos que $\boldsymbol{Z} = (X, Y)'$ segue uma distribuição trinomial de parâmetros n (12), p_X (20/100) e p_Y (65/100) se sua fdp conjunta é dada por

$$p(x, y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_x^x p_y^y (1 - p_x - p_y)^{n-x-y}$$

em que $x \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $y \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $x + y \leq n, \leftrightarrow$, $x \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ e $y \in \{0, 1, ..., n - x\}$ ou $y \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ e $x \in \{0, 1, 2, ..., n - y\}$

- Provar que
  - $X \sim \text{binomial}(n, p_X)$ e $Y \sim \text{binomial}(n, p_Y)$.
  - $Cov(X,Y) = -np_Xp_Y$, $Corre(X,Y) = -\dfrac{np_Xp_Y}{\sqrt{p_X(1-p_X)p_Y(1-p_Y)}}$.
  - $X|Y = y \sim \text{binomial}(n-y, p_X/(1-p_Y))$ e

    $Y|X = x \sim \text{binomial}(n-x, p_y/(1-p_x))$.
- Veja também `https://www.ime.unicamp.br/~cnaber/aula_DPD_ADD_1S_2017.pdf`.

- Em geral, essa distribuição surge quando realizamos n experimentos independentes e idênticos. Suponha que cada experimento possa levar a qualquer um de r resultados possíveis, com respectivas probabilidades $p_1, \ldots, p_r$, $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$. Se X_i : número de experimentos que levam ao resultado i, então

$$p(x_1, \ldots, x_{r-1}) = \frac{x!}{x_1! \cdots (n - \sum_{i=1}^{r-1} x_i)!} p_1^{x_1} \cdots (1 - \sum_{i=1}^{r-1} p_i)^{n - \sum_{i=1}^{r-1} x_i}$$

$x_1 + \ldots + x_{r-1} \leq n$.

- Dizemos que $(X_1, \ldots, X_{r-1})'$ segue a distribuição multinomial de parâmetros n e $p_1, \ldots, p_{r-1}$. Se $r = 2$, a distribuição multinomial recebe o nome de binomial, e se $r = 3$ é chamada de trinomial.

Vetores aleatórios bivariados contínuos

- Podemos transferir todos os conceitos estudados para o caso de vetores aleatórios discretos, para o caso contínuo.
- Dizemos que $\boldsymbol{Z} = (X, Y)'$ é um vetor aleatório contínuo se ele assume valores em um conjunto não enumerável de $\mathbb{R}^2$.
- Exemplo: Assuma que X e Y representam a altura (em metros) e peso (em kilogramas) de uma determinada pessoa, respectivamente. Nesse caso vemos que $\boldsymbol{Z} = (X, Y)'$ é um vetor aleatório contínuo.

Distribuição conjunta: Caso Contínuo

- Uma função $f(x, y)$ a valores reais ($\mathbb{R}$), satisfazendo:
  - $f(x, y) \geq 0$, para todo (x, y);
  - $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dxdy = 1$;

  é dita ser uma função de densidade conjunta de X e Y (ou simplesmente densidade).
- Probabilidades (intervalares) de interesse podem ser calculadas através de $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dydx$.

- Exemplo: Suponha que os irmãos, Sam e Dean, trabalham atendendo casos supernaturais. Em um dia selecionado ao acaso, seja X a fração de tempo do Sam atendendo um caso de Lobisomem e Y a fração de tempo de Dean atendendo um caso de Metamorfo. Então X e Y tomam valores no intervalo $[0, 1]$. Se a função de densidade conjunta f do vetor (X, Y) é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C\left(x + y^2\right), & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

em que C é uma constante positiva.

- Qual o valor de C?
- Qual a probabilidade de que nenhum dos irmãos esteja ocupado mais de uma quarta parte do tempo?
- Pela segunda condição na definição de densidade conjunta segue que

$$C = \left[\int_0^1 \int_0^1 (x + y^2) dxdy \right]^{-1} = \frac{6}{5}$$

- Pela definição anterior, temos que:

$$P(0 \leq X \leq 1/4, 0 \leq Y \leq 1/4) = \int_0^{1/4} \int_0^{1/4} \frac{6}{5}(x + y^2) dxdy = \frac{7}{640}.$$

Distribuições marginais

- Analogamente ao caso discreto, definimos as densidades marginais de X e Y, por f_X e f_Y, como se segue:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, \;\; \text{para} \;\; \text{todo} \;\; x \;\; \text{real},$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx, \;\; \text{para} \;\; \text{todo} \;\; y \;\; \text{real}.$$

- Note-se que a distribuição marginal de uma variável é obtida integrando a densidade conjunta em relação a todos os valores possíveis da outra variável.

- Exemplo: Considere um círculo de raio R e suponha que um ponto dentro do círculo é escolhido aleatoriamente de maneira que todas as regiões do círculo tenham a mesma probabilidade de conter esse ponto (ou seja, o ponto está uniformemente distribuído no interior do círculo). Se o centro do círculo está na origem, e X e Y correspondem às coordenadas do ponto escolhido, então como (X, Y) tem a mesma probabilidade de estar na vizinhança de qualquer ponto no círculo, a densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Qual o valor de c?
- Quais são as distribuições marginais f_X e f_Y?
- Para encontrarmos o valor de c procedemos como no exemplo anterior e do fato que a área do círculo é igual a πR^2. Então, se definirmos $A := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$, segue que

$$c = \left[\int_A dxdy\right]^{-1} = \frac{1}{\pi R^2}$$

- Portanto, a densidade conjunta de X e Y é

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- O conjunto de valores de y é $|y| \leq \sqrt{R^2 - x^2} := k$. Então

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} \int_{-k}^{k} dy = \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - x^2}, & |x| \leq R^2 \\ 0, & |x| > R^2 \end{cases}$$

- Por simetria, o conjunto de valores de x é $|x| \leq \sqrt{R^2 - y^2} := k^\star$. Então

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} \int_{-k^\star}^{k^\star} dy = \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - y^2}, & |y| \leq R^2 \\ 0, & |y| > R^2 \end{cases}$$

Distribuições Condicionais

- Consideraremos agora o cálculo das densidades condicionais.
- Se X e Y tem densidade conjunta $f(x, y)$, então a densidade condicional de X dado que $Y = y$ é definida, para todos os valores de y tais que $f_Y(y) > 0$, como

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \tag{1}$$

- Essa definição permite definir probabilidades condicionais de eventos associados a uma variável aleatória.

- Mais precisamente, se $A \subseteq \mathbb{R}$

$$P(X \in A|Y = y) = \int_A f(x|y)dx. \qquad (\dagger)$$

- Exemplo: Considere $\boldsymbol{Z} = (X, Y)'$ vetor aleatório, tal que X e Y representam o tempo (em horas) em que um atleta homem e uma atleta mulher acabam uma maratona, respectivamente. Além disso, suponha que a função de densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\exp(-x/y)\exp(-y)}{y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Determine a probabilidade de que um atleta homem acabe a maratona em no mínimo uma hora, sabendo-se que uma mulher acabou a maratona no tempo y.

- Devemos calcular $P(X \geq 1|Y = y)$, pela definição dada em (1), segue que

$$P(X \geq 1|Y = y) = \int_1^\infty f(x|y)dx,$$

em que $f(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$.

- Temos que $f_Y(y) = \displaystyle\int_0^\infty f(x,y)dx = \exp(-y)\int_0^\infty \frac{\exp(-x/y)}{y}dx =$ $\exp(-y)$, para todo $y > 0$.
- Logo, $f(x|y) = \dfrac{\exp(-x/y)}{y}$, $y > 0$. Consequentemente

$$P(X \geq 1|Y = y) = \int_1^\infty \frac{\exp(-x/y)}{y}dx = \exp(-1/y), \quad y > 0.$$

Esperança Condicional: Caso Contínuo

- A esperança condicional de X dado $Y = y$, denotada por $E(X|Y = y)$, é definida por $E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx$.
- Note que $h(y) = E(X|Y = y)$ é uma função de y.

Esperança Condicional: Caso Contínuo

- Voltemos ao exemplo anterior (dos atletas), e suponha que queremos calcular o tempo médio em que um homem acaba uma maratona sabendo-se que uma mulher acabou a maratona em 3 horas.
- Ou seja, $E(X|Y=3) = \int_0^\infty xf(x|3)dx = \int_0^\infty x\frac{\exp(-x/3)}{3}dx = 3$. Portanto em média um homem acaba a maratona em 3 horas, sabendo-se que uma mulher acabou a maratona em 3 horas.

Covariância: Caso Contínuo

- Lembre-se que a covariância entre duas variáveis aleatórias X e Y pode ser calculada através de $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
- Assim, no caso em que X e Y são v.a's contínuas com função de densidade conjunta f, segue que

$$Cov(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dxdy - \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy.$$

- Lembre-se que se $Cov(X, Y) = 0$ dizemos que X e Y são não correlacionadas.
- Questão: No exemplo dos irmãos Sam e Dean, X e Y são correlacionas?

- Lembre-se que a densidade conjunta de (X, Y) é dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x+y^2), & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x f_X(x)dx = \int_0^1 x \left[\int_0^1 f(x,y)dy\right] dx = \frac{3}{5}. \\ E(Y) &= \int_0^1 y f_Y(y)dy = \int_0^1 y \left[\int_0^1 f(x,y)dx\right] dy = \frac{3}{5}. \\ E(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xyf(x,y)dxdy = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

e $Cov(X,Y) = \frac{2}{5} - (\frac{3}{5})^2 = 1/25 = 0,04 > 0$. Portanto X e Y são correlacionadas. Exercício: calcular a correlação.

Distribuição Normal Bivariada

- Assim como a distribuição normal é um modelo importante para variáveis aleatórias univariadas contínuas, para v.a's bivariadas contínuas pode-se considerar o modelo normal bivariado, definido a seguir

$$f(x,y) = cste \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho A(x,y) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}$$

em que, $cste = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$, e $A(x,y) = \frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}$, com $\mu_x, \mu_y \in \mathbb{R}$ $\sigma_x, \sigma_y > 0$, $-1 < \rho < 1$ e $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

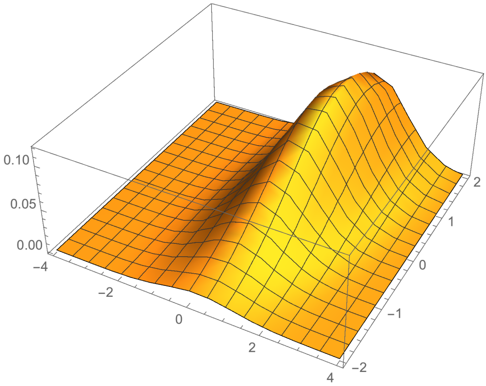


Figura 1: Densidade normal bivariada $\mu_x = \mu_y = 1$, $\sigma_x = 2$, $\sigma_y = 1$, $\rho = 1/(2\sqrt{2})$.

Propriedades da Normal Bivariada

- As distribuições marginais de X e Y são normais unidimensionais, a saber $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, e $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$.
- $Cov(X, Y) = \rho\sigma_x\sigma_y$ e $Corre(X, Y) = \rho$. X e Y são independentes, se, e somente se, $\rho = 0$.
- As distribuições condicionais são normais, com
  - $Y|x \sim N(\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x), \sigma_y^2(1 - \rho^2))$
  - $X|y \sim N(\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y), \sigma_x^2(1 - \rho^2))$
- Se as variáveis são não correlacionadas, segue que $\rho = 0$, logo

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right]\right)\left(\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right)$$

Exercício: provar os resultados acima.

- Exemplo: Os gastos (em milhares de reais) em Smartphones e Tablets de um grupo de consumidores, segue uma distribuição normal bivariada com $\mu_x = \mu_y = 1$, $\sigma_x = 2$, $\sigma_y = 1$, $\rho = 1/(2\sqrt{2})$ (vide Figura 1).
- Qual a distribuição condicional dos gastos em Tablets para os consumidores que gastam 0.8 milhares de reais em Smartphones?
- Sejam X e Y os gastos em Smartphones e Tablets de um consumidor, respectivamente.
- Queremos saber $f(y|0.8) = \frac{f(0.8,y)}{f_X(0.8)}$. A distribuição marginal de X é normal com parâmetros $\mu_x = 1$ e $\sigma_x^2 = 4$. Portanto

$$f(y|0.8) = 2\sqrt{\frac{2}{7\pi}} \exp\left(-\frac{4y^2}{7} + \frac{18y}{35} - \frac{169}{1400}\right), \quad -\infty < y < \infty$$

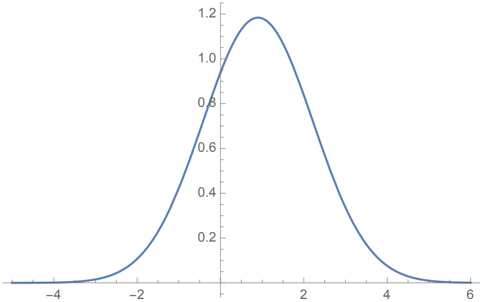


Figura 2: Densidade condicionada dos gastos em tablets para os consumidores que gastam 800 reais em Smartphones.

veja também https://www.ime.unicamp.br/~cnaber/aula_DNM_Ana_Multi_2S_2017.pdf