Funções geradoras de momentos

- Seja X uma v.a. qualquer (discreta ou contínua), tal que seu n-ésimo *momento* (centrado em 0) é dado por $E(X^n)$

$$E(X^n) = \begin{cases} \sum_x x^n f(x); \text{ se } X \text{ é discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx; \text{ se } X \text{ é contínua} \end{cases}$$

- A *função geradora de momentos* (fgm) de uma v.a. X é definida como

$$\phi_X(t) := E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x); \text{ se } X \text{ é discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx; \text{ se } X \text{ é contínua} \end{cases}$$

- $\phi_X(t)$ é chamada de fgm pois, a partir dela, é possível obter (todos) os momentos de X (quando estes existem).
- Nem sempre a fgm de uma va existe.
- Nem sempre a fgm terá uma forma útil (expressão fechada).
- É necessário apenas que a fgm existam $\forall t \in (-a, a)$, para alguma $a > 0$.

- Por exemplo,

$$\phi'_X(t) \;=\; \frac{d}{dt}E(e^{tX}) = E\left[\frac{d}{dt}e^{tX}\right] = E(Xe^{tX})$$

  Portanto $\phi'_X(0) = E(X)$.

- Similarmente,

$$\phi''_X(t) \;=\; \frac{d}{dt}\phi'_X(t) = E\left[\frac{d}{dt}Xe^{tX}\right] = E(X^2e^{tX})$$

  Logo $\phi''_X(0) = E(X^2)$.

- Em geral, a *n*-ésima derivada de $\phi_X(t)$ avaliada em $t = 0$ é igual a $E(X^n)$, pois

$$\phi_X^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n}\phi_X(t) = E(X^n e^{tX})$$

  Logo $\phi_X^{(n)}(0) = E(X^n), \; n \geq 1$.

Funções geradoras de momentos de distribuições comuns

- Exemplo: Seja $X \sim \text{binomial}(n, p)$, temos que (binômio de Newton)

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= E(e^{tX}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^t p)^k (1-p)^{n-k} \\
&= (pe^t + 1 - p)^n
\end{aligned}$$

- Derivando $\phi_X(t)$ com relação a t, segue que

$$\phi'_X(t) = n(pe^t + 1 - p)^{n-1} pe^t$$

.

- Portanto,

$$E(X) = \phi'_X(0) = np$$

.

- Derivando $\phi'_X(t)$, podemos obter o segundo momento de X, ou seja

$$\phi''_X(t) = n(n-1)(pe^t + 1 - p)^{n-2}(pe^t)^2 + n(pe^t + 1 - p)^{n-1} pe^t,$$

então $E(X^2) = \phi''_X(0) = n(n-1)p^2 + np$. Portanto

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = np(1-p)$$

- Seja $X \sim$ geométrica(p), temos que

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn} p(1-p)^{n-1} \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{\infty} (e^t(1-p))^n \\
&= \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\log(1-p)
\end{aligned}$$

- Derivando uma primeira e uma segunda vezes, obtemos, respectivamente

$$\phi'_X(t) = \frac{pe^t}{\left((p-1)e^t+1\right)^2}; \quad \phi''_X(t) = -\frac{pe^t\left((p-1)e^t-1\right)}{\left((p-1)e^t+1\right)^3}$$

- Portanto $E(X) = \phi'_X(0) = \dfrac{1}{p}$; $E(X^2) = \phi''_X(0) = \dfrac{2-p}{p^2}$; $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

- Seja $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, temos que

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}.\end{aligned}$$

- Derivando uma primeira e uma segunda vezes, obtemos, respectivamente

$$\phi'_X(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$\phi''_X(t) = (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$$

- Portanto $E(X) = \phi'_X(0) = \lambda$; $E(X^2) = \phi''_X(0) = \lambda^2 + \lambda$; $V(X) = \lambda$.

- Seja $X \sim$ uniforme$[\alpha, \beta]$,

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \int_\alpha^\beta e^{tx} \frac{1}{\beta-\alpha} dx \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha} \int_\alpha^\beta e^{tx} dx \\ &= \frac{e^{t\beta}-e^{t\alpha}}{t(\beta-\alpha)}, \; t \neq 0 \end{aligned}$$

- Exercício: Calcule $\phi'_X(t)$ e $\phi''_X(t)$ e obtenha o primeiro momento e a variância de X.

- Seja $X \sim$ exponencial(θ),

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \int_0^\infty e^{tx}\theta e^{-\theta x}dx \\ &= \theta\int_0^\infty e^{-(\theta-t)x}dx = \frac{\theta}{\theta-t};\ t<\theta\end{aligned}$$

- Derivando obtemos que

$$\phi_X'(t) = \frac{\theta}{(\theta-t)^2}$$

$$\phi_X''(t) = \frac{2\theta}{(\theta-t)^3}$$

- Logo, $E(X) = \phi_X'(0) = \dfrac{1}{\theta}$; $E(X^2) = \phi_X''(0) = \dfrac{2}{\theta^2}$;

$$V(X) = \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}.$$

- Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Z \sim N(0,1)$. Logo $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. Por outro lado

$$\begin{aligned}
\phi_Z(t) &= E(e^{tZ}) = \int_{\Re} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tz} e^{-z^2/2} dz = e^{t^2/2} \underbrace{\int_{\Re} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-t)^2/2} dz}_{1} \\
&= e^{t^2/2}
\end{aligned}$$

- Mas,

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= E(e^{tX}) = E(e^{t\sigma Z + t\mu}) = e^{t\mu} E(e^{(t\sigma)Z}) = e^{t\mu}\phi_Z(t\sigma) \\
&= e^{t\mu} e^{\sigma^2 t^2/2} = e^{t\mu + \sigma^2 t^2/2}
\end{aligned}$$

- Logo

$$\begin{aligned} \phi_X'(t) &= e^{t\mu+\sigma^2t^2/2}(\mu+\sigma^2t) \\ \phi_X''(t) &= e^{t\mu+\sigma^2t^2/2}(\mu+\sigma^2t)^2 + e^{t\mu+\sigma^2t^2/2}(\sigma^2) \end{aligned}$$

- Portanto

$$\begin{aligned} \phi_X'(0) &= E(X) = e^0(\mu) = \mu \\ \phi_X''(0) &= E(X^2) = e^0\mu^2 + e^0(\sigma^2) = \mu^2 + \sigma^2 \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

- Uma propriedade importante da função geradora de momentos é a seguinte:

Função geradora da soma de v.a's independentes

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a's independentes, e defina $S_n = X_1 + \ldots X_n$. Então

$$\phi_{S_n}(t) = \phi_{X_1}(t) \cdots \phi_{X_n}(t)$$

- Ou seja, a f.g.m. da soma de v.a's independentes é igual ao produto das f.g.m. de cada v.a.

- Exemplo: Se $Z_1, \ldots, Z_n$ são v.a's iid com distribuição $\mathrm{Normal}(0,1)$, então $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ tem distribuição qui-quadrado com n- graus de liberdade, denotada por $\chi^2_{(n)}$.
- Definindo $X_i = Z_i^2$, temos que

$$\begin{aligned}
\phi_{X_i}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tx^2} e^{-x^2/2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\tau^2} dx \ (\tau^2 = (1-2t)^{-1}) \\
&= \tau \\
&= (1-2t)^{-1/2},
\end{aligned}$$

que corresponde a fgm de uma va qui-quadrado com n graus de liberdade.
- Portanto $\phi_{S_n}(X) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(t) = (1-2t)^{-n/2}$.

- Exercício: calcular a fgm da distribuição binomial negativa e qui-quadrado.