Variáveis Aleatórias Contínuas

- Variáveis aleatórias contínuas: vamos considerar agora, quantidades (variáveis) para as quais não é possível associar uma tabela de probabilidades pontuais ou frequências
  - tempo de duração de uma chamada telefônica
  - tempo de vida de uma lâmpada
  - altura das pessoas
- Para esses tipos de quantidades, para as quais não podemos associar frequências pontuais tais que a soma de todas elas seja igual a 1, surge o conceito de "função de densidade de probabilidade" (f.d.p.).

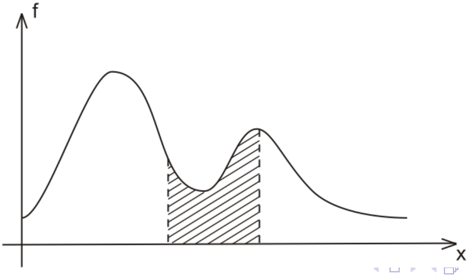
Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição: a função de densidade de probabilidade de uma v.a. X é uma função f que verifica:
  - $f(x) \geq 0 \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (f é integrável)
- Toda v.a. X para a qual seja possível associar uma f.d.p. será chamada de v.a. contínua.
- Note que o suporte de uma vac (variável aleatória contínua) é um conjunto infinito não enumerável.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- A probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença a um intervalo da reta (a,b], (a,b), [a,b], [a,b), $a < b$ é dada por:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b)$$
$$= \int_a^b f(x)dx$$



Variáveis Aleatórias Contínuas

- Notação: se X for uma v.a. contínua com função de densidade de probabilidade (ou simplesmente densidade) f, no lugar de f denotaremos f_X
- À probabilidade de que uma v.a. X contínua pertença ao intervalo da reta $(-\infty, x]$ (ou $(-\infty, x)$) daremos o nome de função de distribuição acumulada (f.d.a.), e a denotaremos por F_X

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = P(X \leq x) = P(X < x)$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Exemplo: X v.a. contínua com f.d.p.:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Note que:
  - $f(x) \geq 0 \quad \forall \ x \in \mathbb{R}$
  - $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (2-x)dx = 1$
- Podemos também calcular $P(0 < X \leq 0.8) = \int_0^{0.8} xdx = 0.32$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Propriedade: toda v.a. X contínua (ou seja, que possui f_X como f.d.p.) tem probabilidade pontual nula: $P(X = x) = 0$ (exercício)
- Resumindo: $F(x) = P(X \leq x)$
  - caso discreto: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$
  - caso contínuo: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição: seja X uma v.a. contínua com densidade f_X, dizemos que X possui esperança finita se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$$

- Nesse caso, definimos:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição: seja X uma v.a. contínua com densidade f_X, se a quantidade $E(|X|^k) < \infty$, $k \geq 1$, definimos por **momento** de ordem k da v.a. o valor $E(X^k)$
  - caso discreto: $E(X^k) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^k P(X = x_i)$
  - caso contínuo: $E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Definição: seja X v.a. com valor esperado $E(X), E(X^2) < \infty$, definimos por variância, a quantidade:

$$Var(X) = E([X - E(X)^2]) = E(X^2) - E^(X)$$

- E definimos como desvio padrão:

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

- Note que, assim como no caso discreto, ambas as quantidades oferecem medidas de dispersão da variável X em relação ao valor esperado $E(X)$.

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Exemplo:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x) dx = 1$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [x-1]^2 f_X(x) dx = \frac{1}{6}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

- Exercício: Para a função f_X, calcular
  - $E(X^2)$
  - $E(X^3)$

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$