Modelo Uniforme

- Exemplo: Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25, e meu colega tem outros 5 bilhetes, com os números 1, 11, 29, 68 e 93. Quem tem maior probabilidade de ser sorteado?
  - espalhar os números é a melhor forma de ganhar o sorteio?
  - assumindo honestidade da rifa, cada número tem a mesma probabilidade de ocorrência de $\frac{1}{100}$.
  - como eu e meu colega temos 5 bilhetes, temos a mesma probabilidade de ganhar a rifa: $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$
  - assim, a probabilidade de ganhar depende somente da quantidade de bilhetes que se tem na mão, independente da numeração.

Modelo Uniforme

- X é uma variável aleatória cujos possíveis valores são representados por $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$
- X segue o modelo uniforme discreto se é atribuido a mesma probabilidade $\frac{1}{k}$ a cada um desses possíveis valores. Notação $X \sim \text{uniforme}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ou $X \sim U\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.
- $P(X = x_j) = \frac{1}{k} \quad \forall \ 1 \leq j \leq k$ ou $\mathbb{1}_{\{x_1, x_2, \dots, x_k\}}(x)$ (fdp $=$ função de probabilidade).
- Lembre-se de que uma função de probabilidade tem de ser tal que $P(X = x_j) \in [0, 1] \ \forall \ x_j$ e $\sum_{x_j \in \Omega} P(X = x_j) = 1$.

Modelo Uniforme

- $E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i$
- $Var(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i (x_i - E(X))^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (x_i - E(X))^2$
- Em geral as expressões acima não apresentam uma forma "fechada".
- Função de distribuição acumulada:

  $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_j \leq x} P(X = x_j) = \frac{n(x)}{k}$, em que $n(x)$ é o número de observações $x_i's$ tal que $x_i \leq x$.
- Função de sobrevivência:

  $S(x) = 1 - F(x) = P(X > x) = \sum_{x_j > x} P(X = x_j) = \frac{k - n(x)}{k}$.

Propriedade Geral da Variância

- Definição: $Var(X) = E([X - E(X)]^2)$

$$
\begin{aligned}
E([X - E(X)]^2) &= E([X - \mu_X]^2) = E(X^2 - 2X\mu_x + \mu_X^2) \\
&= E(X^2) - 2\mu_X E(X) + \mu_X^2 = \mu_{X^2} - 2\mu_X \mu_X + \mu_X^2 \\
&= \mu_{X^2} - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 = \mu_{X^2} - \mu_X^2 \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2
\end{aligned}
$$

- Então: $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
- Exercício: calcular $E(X)$ e $Var(X)$ se $x_i = i, i = 1, 2, \ldots, k$.

Modelo Uniforme

- Retomando o modelo da uniforme
  - já sabemos que $E(X) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$
  - portanto $[E(X)]^2 = \frac{1}{k^2}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2$
  - $E(X^2) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i^2$
  - finalmente $Var(X) = \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2\right]$

Modelo Uniforme

- Exemplo: X = resultado obtido no lançamento de um dado honesto

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- $E(X) = \frac{1}{6} \times (1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3.5$
- $Var(X) = \frac{1}{6}[(1+4+9+16+25+36) - \frac{1}{6} \times (21)^2] = \frac{35}{2} = 17.5$
- Interpretação aproriada de $E(X)$: a cada 10 lançamentos espera-se que a soma das faces obtidas esteja em torno de 35.

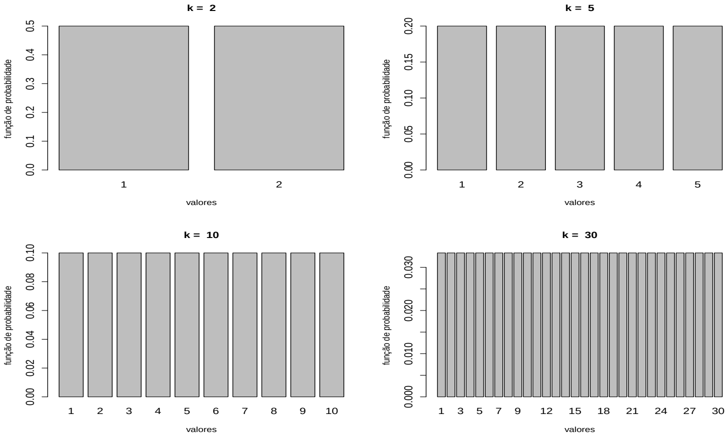
Modelo Uniforme

- Retomando o exemplo do dado:
  - $F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \dfrac{2}{6}$
  - $F(2.5) = P(X \leq 2.5) = P(X = 1) + P(X = 2) = \dfrac{2}{6}$

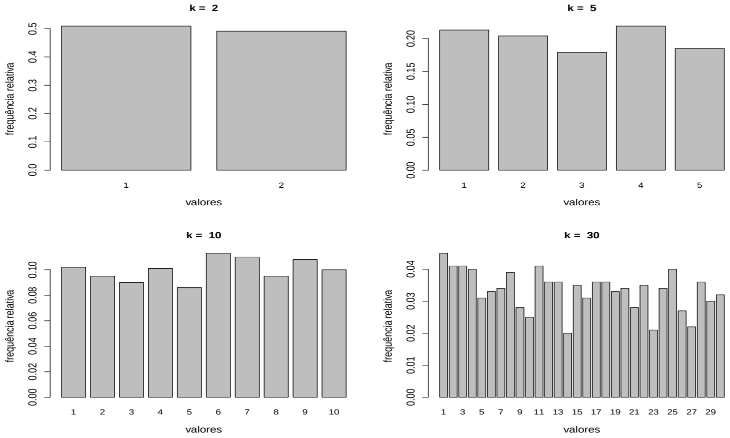
Simulação

- Representar de forma controlada (e.g., através de um program de computador) uma situação real.
- Simular a amostragem de unidades de uma população, cuja característica de interesse possa ser modelada através de alguma distribuição de probabilidade.
- Simular a seleção de números $(\{1, 2, ..., k\})$, o lançamento de uma moeda ou dado etc.

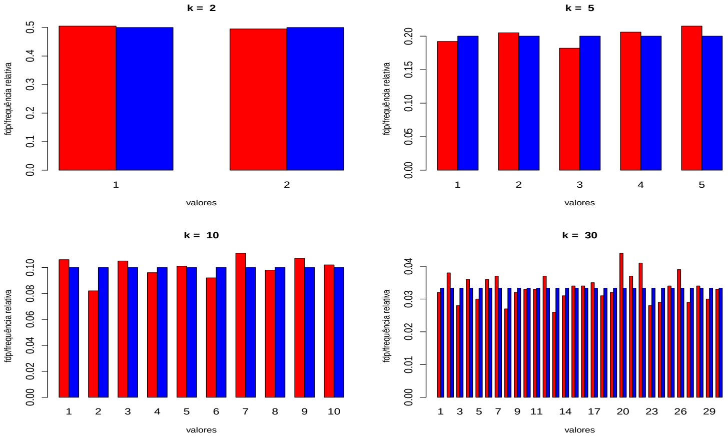
fdp: uniforme



valores simulados: uniforme



fdp (azul) e valores simulados (vermelho): uniforme



Modelo Bernoulli

- Consideremos um experimento E com espaço amostral Ω e o evento A.
- Dizemos que ocorreu sucesso se o evento A aconteceu e fracasso, caso contrário.
- Exemplo: Experimento - lançar uma moeda e verificar se observamos cara ou coroa. Consideramos como sucesso a obtenção de cara.
- Esse tipo de experimento é chamado de ensaio Bernoulli.

Modelo Bernoulli

- Ensaios tipo Bernoulli: estamos interessados na ocorrência de um sucesso ou fracasso.
- Exemplo: uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma cidade, e é perguntado a ela se concorda com um projeto. As possíveis respostas são apenas “Sim” ou “Não”.
- $\Omega = \{\text{Sim}, \text{Não}\}$
- $X = \begin{cases} 1, & \text{evento de interesse ocorre} \\ 0, & \text{caso contário} \end{cases}$
- $P(X = 1) = P(sucesso) = p \Rightarrow P(X = 0) = P(fracasso) = 1 - p$
- Homenagem ao matemático Suiço Jacob Bernoulli.

Modelo Bernoulli

- Forma geral de escrever a probabilidade de uma variável Bernoulli:

  $P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$ em que $x \in \{0,1\}$ (ou $\mathbb{1}_{\{0,1\}}(x)$)
- $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$
- $E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$
- $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$
- f.d.a.: $\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & x \in [0,1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$
- Exercício: calcule $S(x)$.
- Notação $X \sim$ Bernoulli(p), parâmetro p.

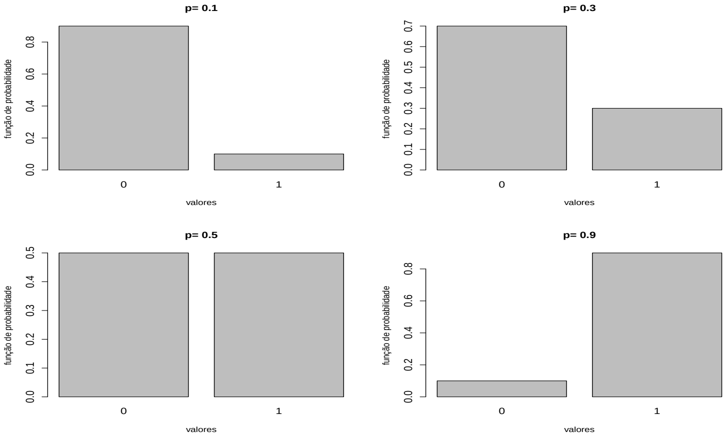
Modelo Bernoulli

- Exemplo: lançamos um dado e consideramos como sucesso, a obtenção da face 5. Supondo que o dado é honesto:

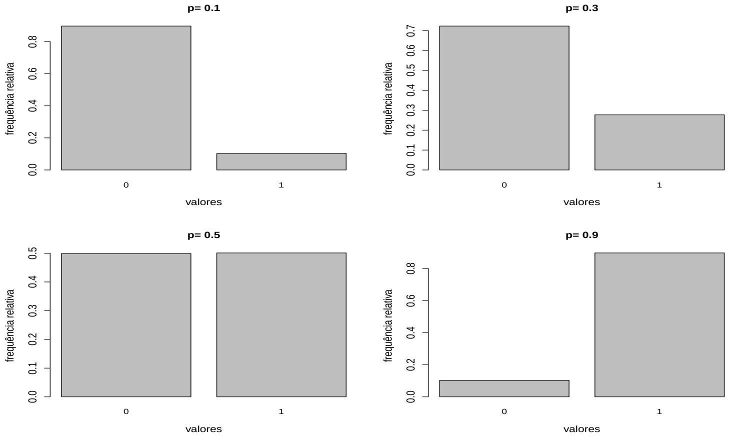
x	0	1
$p(x)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

- $P(X=x) = p^x(1-p)^{1-x} = \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{1-x}$ em que $x = 0, 1$
- $E(X) = \frac{1}{6}$
- $E(X^2) = \frac{1}{6}$
- $Var(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{6-1}{36} = \frac{5}{36}$

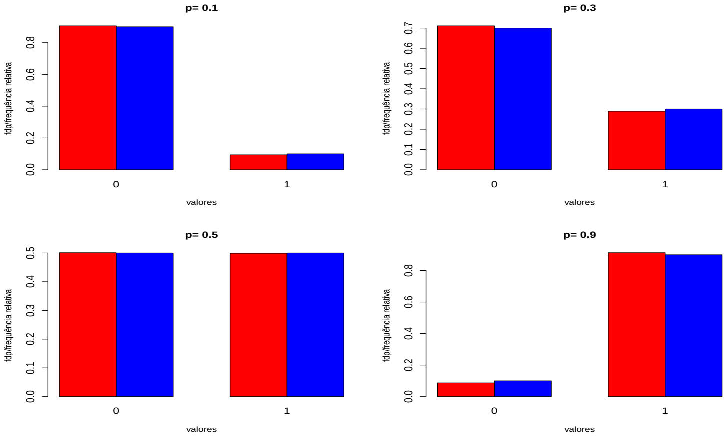
fdp: Bernoulli



valores simulados: Bernoulli



fdp (azul) e valores simulados (vermelho): Bernoulli



Modelo Binomial

- Consideremos novamente um experimento E com espaço amostral Ω e o evento A.
- Dizemos que ocorreu sucesso se o evento A for observado e fracasso, caso contrário.
- Repetimos o experimento (ensaios de Bernoulli) n vezes, de forma independente.
- X=número de sucessos nos n experimentos.
- Exemplo: lançar uma moeda 3 vezes e verificar se se observa cara ou coroa. Consideramos como sucesso, a obtenção de cara.
- Os valores possíveis de X são $\{0, 1, 2, 3\}$.

Modelo Binomial

- A repetição de ensaios Bernoulli independentes dá origem a uma variável aleatória binomial.
- Exemplo: Sabe-se que a eficiência de uma vacina é de 80%. Um grupo de 3 indivíduos é sorteado, dentre a população vacinada, e cada um submetido a testes para averiguar se se está imunizado. Nesse caso, consideramos como sucesso, a imunização.
  - $X_i = \begin{cases} 1, & \text{indivíduo i está imunizado} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
  - pelo enunciado, sabe-se que $P(X_i = 1) = p = 0.8$

Modelo Binomial

- Os indivíduos X_1, X_2 e X_3 são independentes e cada um é uma variável Bernoulli.
- Se o interesse está em estudar X = número de indivíduos imunizados no grupo, X poderá assumir valores em $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$.
- Note que $X = X_1 + X_2 + X_3$.

Modelo Binomial

evento	P(evento)	X
$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0$	$(0.2)^3$	0
$X_1 = 1,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 0,\ X_2 = 1,\ X_3 = 0$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1$	$0.8 \times (0.2)^2$	1
$X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 0$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 1,\ X_2 = 0,\ X_3 = 1$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 0,\ X_2 = 1,\ X_3 = 1$	$(0.8)^2 \times 0.2$	2
$X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 1$	$(0.8)^3$	3

Modelo Binomial

- Assim, as probabilidades de cada valor possível de X são:

x	0	1	2	3
$p(x)$	$(0.2)^3$	$3 \times 0.8 \times (0.2)^2$	$3 \times (0.8)^2 \times 0.2$	$(0.8)^3$

- E o comportamento de X é completamente determinado pela função

$$P(X = x) = \binom{3}{x}(0.8)^x(0.2)^{3-x}$$

Modelo Binomial

- Modelo Geral: Considere a repetição de n ensaios X_i Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso p. A variável aleatória $X = X_1 + \ldots + X_n$ que representa o total de sucessos corresponde ao modelo binomial com parâmetros n e p.
  - A probabilidade de se observar x é dada pela expressão geral

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad \forall \quad x \in \{0, 1, \ldots, n\}, \text{ ou } \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots,n\}}(x)$$

  - notação: $X \sim \text{bin}(n, p)$ ou $X \sim \text{binomial}(n, p)$.
- O nome é devido aos coeficientes binomiais $\binom{n}{x}$ que aparecem da fdp.

Modelo Binomial

- Demonstração: para uma dada configuração de n ensaios, digamos $\{S, S, F, S, ..., F\}$ temos que sua probabilidade de ocorrência é $p^x q^{n-x}$.
- Contudo, temos um total de $\binom{n}{x}$ configurações possíveis que levam ao mesmo número de sucessos e de fracassos.
- Como somente uma delas pode ocorrer, então $P(C_1 \uplus C_2 \uplus ... \uplus C_{\binom{n}{x}}) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{x}} p^x q^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ em que C_i é a i-ésima configuração.

Propriedades da Esperança e Variância

- A esperança de uma soma de variáveis aleatórias é a soma das esperanças dessas variáveis

  X e Y variáveis aleatórias $\Rightarrow E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

- A variância de uma soma de duas variáveis aleatórias independentes é a soma da variância dessas variáveis

  $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

- Além disso, duas variáveis aleatórias são independentes $\Leftrightarrow$ $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ (voltaremos a esse conceito mais adiante).

Função de probabilidade

- Demonstrar que $P(X = x)$ é uma fdp. Lembrete: $\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x} = (a+b)^n$.
- Já foi provado que $P(X = x) \in [0, 1], \forall x$.

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (p + 1 - p)^n = 1$$

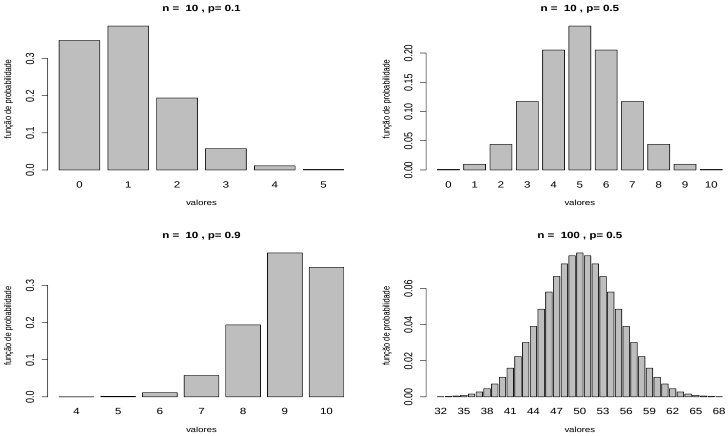
Propriedades da Esperança e Variância

- Lembrando que uma binomial(n,p) é uma soma de n Bernoullis independentes.
- $E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = p + p + \ldots + p = np$.
- $V(X) = V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = p(1-p) + p(1-p) + \ldots + p(1-p) = np(1-p)$.
- Exercício: calcular $E(X)$ e $V(X)$ através das respectivas definições.

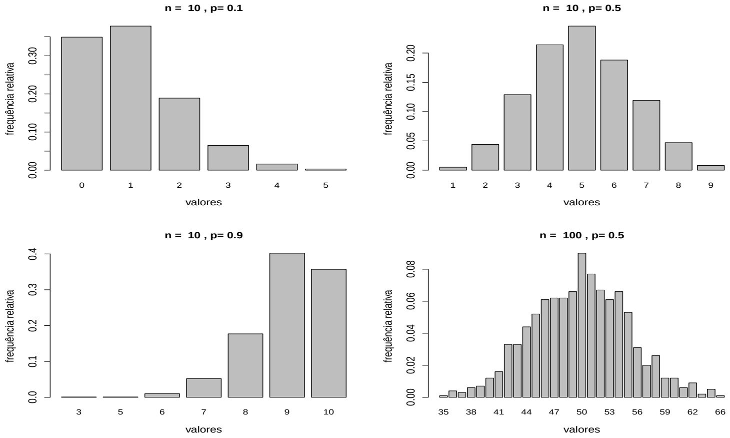
Modelo Binomial

- No exemplo da vacina, temos então $n = 3$ e $p = 0.8$
  - $X \sim \text{bin}(3, 0.8)$.
  - $E(X) = 3 \times 0.8 = 2.4$.
  - $Var(X) = 3 \times 0.8 \times 0.2 = 0.48$.

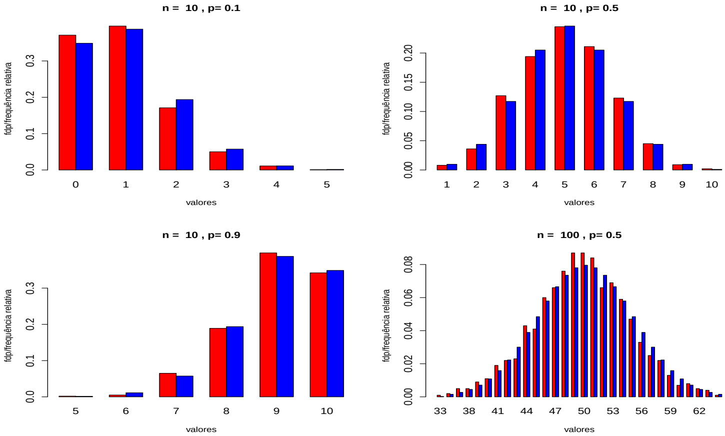
fdp: binomial



valores simulados: binomial



fdp (azul) e valores simulados (vermelho): binomial



Modelo Poisson

- É apropriado para contagens sem um limite superior.
- Depreendido a partir do modelo binomial quando $n \to \infty$ (número de tentativas), $p \to 0$ (probabilidade de sucesso) and $np \to \lambda$ (valor esperado).
- Demonstração: Temos que se $X \sim \text{bin}(n, p)$, então

$$
\begin{aligned}
P(X = x) &= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{x! n^x} (pn)^x \left(1 - \frac{np}{n}\right)^n \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{-x} \\
&= \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x}{n}+\frac{1}{n}\right)}{x!} (pn)^x \left(1 - \frac{np}{n}\right)^n \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{-x}
\end{aligned}
$$

Cont.

Logo (lembrando que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X=x) &= \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{n}+\frac{1}{n}\right)}{x!} \lim_{n\to\infty}(pn)^x \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{np}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}} \\
&\times \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{np}{n}\right)^{-x} \\
&= \frac{1}{x!}\lambda^x e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Distribuição de Poisson

- Uma variável aleatória X tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, se sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad \forall \; x = 0, 1, 2, \ldots \; ou \; \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(x)$$

- λ é chamado de taxa de ocorrência
- $E(X) = Var(X) = \lambda$
- Notação: $X \sim P(\lambda)$ ou $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

Distribuição de Poisson

- Demonstração da esperança e da variância e sobre a função de probabilidade. Já provamos que $P(X = x) \in [0,1], \forall x$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}}_{e^{\lambda}} = 1$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = \lambda$$

Distribuição de Poisson

$$
\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-2)!} \\
&= \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = \lambda^2
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= E(X^2-X) \rightarrow E(X^2-X) = \lambda^2 \rightarrow E(X^2) = E(X) + \lambda^2 \\
\rightarrow & \quad E(X^2) = \lambda + \lambda^2
\end{aligned}
$$

Logo $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Funções de distribuição acumulada e função de sobrevivência

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$S(x) = P(X > x) = \sum_{y > x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

Distribuição de Poisson

- Exemplo: O Comportamento da emissão de partículas radioativas (de alguma fonte) são, em geral, modeladas através de uma distribuição de Poisson, com o valor do parâmetro dependendo da fonte utilizada.

  Supondo que o número de partículas α emitidas por minuto é uma variável aleatória seguindo o modelo Poisson com parâmetro $\lambda = 5$, ou seja, a taxa de ocorrência é de 5 emissões a cada minuto, podemos estar interessados em calcular a probabilidade de haver mais de duas emissões por minuto.

Distribuição de Poisson

- $X \sim P(5)$.
- $P(X > 2) = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{e^{-5}5^x}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-5}5^x}{x!} \approx 0.875$.
- $E(X) = \lambda = 5$.
- $Var(X) = \lambda = 5$.

Distribuição de Poisson

- Considerando a distribuição $bin(n, p)$, quando temos grandes valores para n e p pequeno (mantendo-se o produto np constante), podemos usar a seguinte aproximação para a probabilidade:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \approx \frac{e^{-np}(np)^x}{x!} \quad \forall \; x = 0, 1, 2, \ldots$$

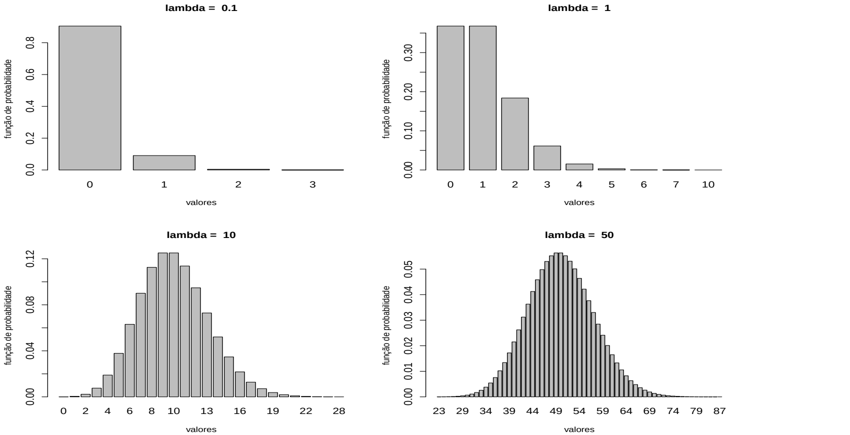
- Geralmente considera-se o critério $np \leq 7$ para usar essa aproximação

Distribuição de Poisson

- Exemplo: $X \sim bin(100, 0.065)$, deseja-se obter $P(X = 10)$
  - $\lambda = np = 100 \times 0.065 = 6.5 \leq 7$
  - no modelo Binomial:

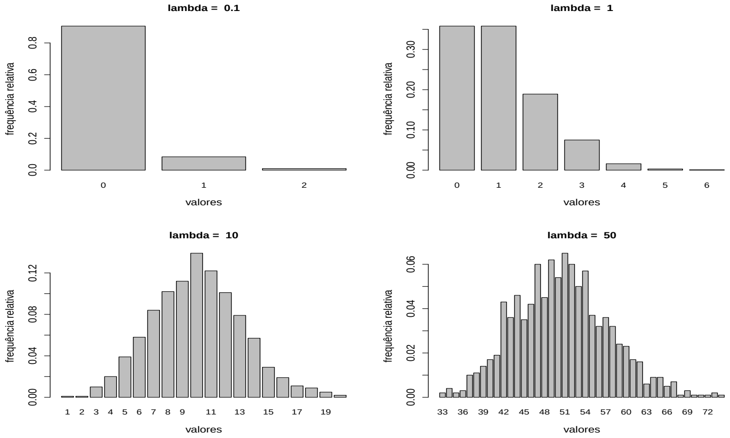
    $P(X = 10) = \binom{100}{10}(0.065)^{10}(0.935)^{100-10} = 0.055$
  - no modelo Poisson: $P(X = 10) = \dfrac{e^{-6.5}(6.5)^{10}}{10!} \approx 0.056$

fdp: Poisson

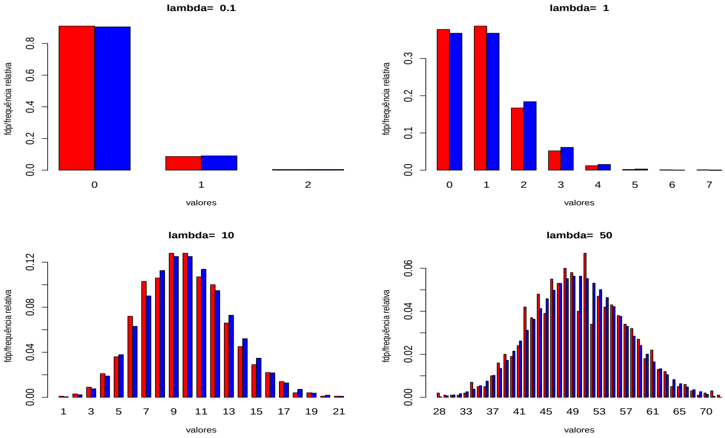


lambda = 0.1
função de probabilidade
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
1
2
3
valores
lambda = 1
função de probabilidade
0.00
0.10
0.20
0.30
0
1
2
3
4
5
6
7
10
valores
lambda = 10
função de probabilidade
0.00
0.04
0.08
0.12
0
2
4
6
8
10
13
16
19
22
28
valores
lambda = 50
função de probabilidade
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
23
29
34
39
44
49
54
59
64
69
74
79
87
valores

valores simulados: Poisson



fdp (azul) e valores simulados (vermelho): Poisson



Modelo Geométrico

- Consideremos novamente um experimento E com espaço de resultados Ω e o evento A.
- Dizemos que ocorreu sucesso se o evento A foi observado e fracasso, caso contrário.
- Repetimos o experimento até o primeiro sucesso.
- $Y=$Número de repetições.
- Exemplo: lançar uma moeda repetidas vezes até observar-se a primeira cara.

Modelo Geométrico

- Os valores possíveis de Y são $\{1, 2, 3, ...\}$.
- Repetimos ensaios de Bernoulli até obtermos o primeiro sucesso ($p = P(\text{sucesso})$).
- $Y=$Número de ensaios Bernoulli até o primeiro sucesso.

Modelo Geométrico

$$P(Y = 1) = p$$

$$P(Y = 2) = (1 - p)p$$

$$P(Y = 3) = (1 - p)^2 p$$

$$\vdots$$

$$P(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

Modelo Geométrico

- Notação: $Y \sim G(p)$, $q = 1 - p$
- $E(Y) = \dfrac{1}{p}$.
- $V(Y) = \dfrac{1-p}{p^2}$.
- $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} (1-p)^{y-1} p = p \frac{(q^x - 1)}{q - 1} = 1 - q^x$.
- $S(x) = P(X > x) = q^x$
- $P(Y \geq k + m | Y \geq m) = P(Y \geq k)$. (Perda de memória, provar)

- Demonstrações da esperança, variância e da função de probabilidade. Já vimos que $P(X=x) \in [0,1], \forall x$.

$$\sum_{y=1}^{\infty}(1-p)^{y-1}p = \frac{p}{1-p}\sum_{y=1}^{\infty}(1-p)^{y} = \frac{p}{1-p}\frac{1-p}{p} = 1$$

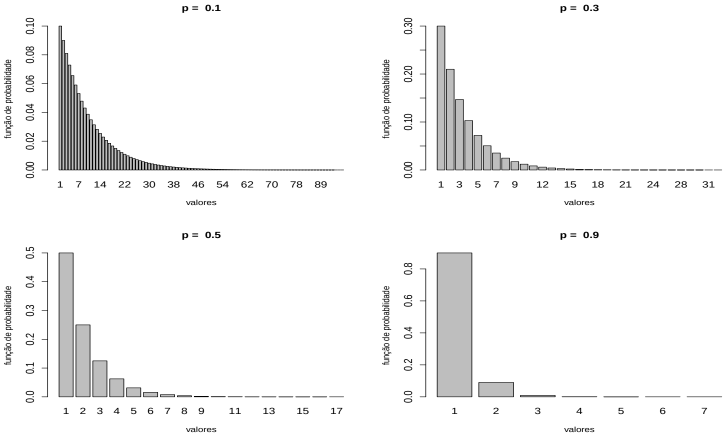
$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y=1}^{\infty} y(1-p)^{y-1}p = p\sum_{y=1}^{\infty}\frac{dq^y}{dq} = p\frac{d}{dq}\sum_{y=1}^{\infty} q^y = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) \\ &= p\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(Y(Y-1)) &= (1-p)\sum_{y=1}^{\infty} y(y-1)(1-p)^{y-2}p = (1-p)p\sum_{y=1}^{\infty}\frac{d^2 q^y}{dq^2} \\
&= p(1-p)\frac{d^2}{dq^2}\sum_{y=1}^{\infty} q^y \\
&= p(1-p)\frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p(1-p)\frac{d}{dq}\frac{1-q+q}{(1-q)^2} \\
&= p(1-p)\frac{d}{dq}\frac{1}{(1-q)^2} = (1-p)\frac{2}{(1-q)^2}
\end{aligned}
$$

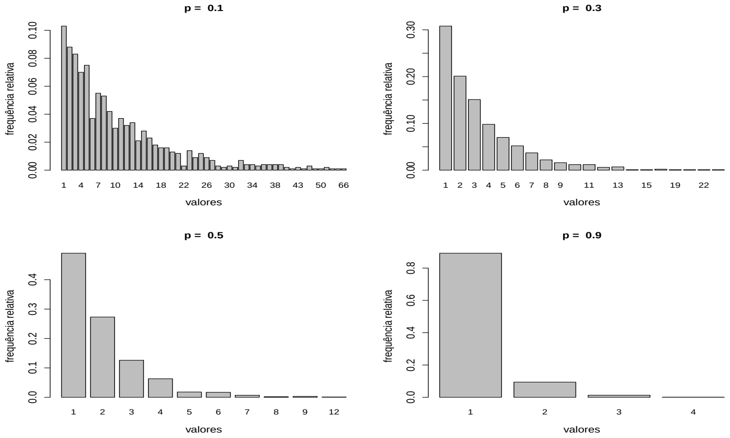
$$E(Y^2 - Y) = (1-p)\frac{2}{p^2} \to E(Y^2) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

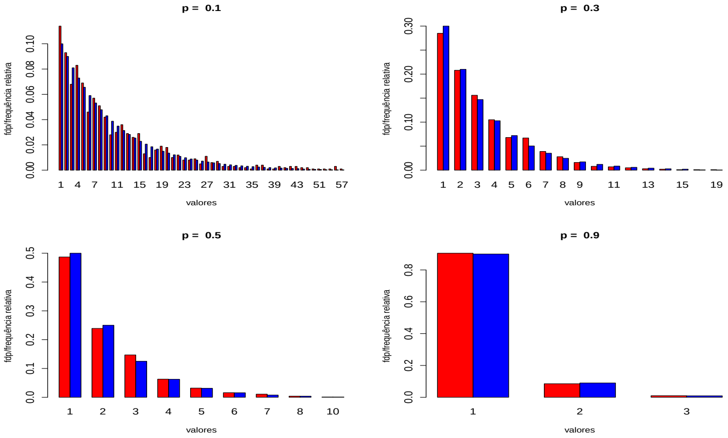
fdp: geométrica



valores simulados: geométrica



fdp (azul) e valores simulados (vermelho): geométrica



modelo binomial negativo

- Consideremos novamente um experimento E com espaço de resultados Ω e o evento A.
- Vamos dizer que ocorreu sucesso se o evento A aconteceu.
- Repetimos o experimento até que r sucessos tenham ocorrido.
- Y=Número de repetições.
- Exemplo: lançar uma moeda repetidas vezes até aparecerem 4 caras.

modelo binomial negativo

- Os valores possíveis de Y são $\{r, r+1, r+2, ...\}$.
- Repetimos ensaios de Bernoulli até obtermos r sucessos ($p = P(\text{sucesso})$).
- Y=Número de ensaios Bernoulli até obtermos r sucessos.
- Assim $Y = X_1 + X_2 + ... + X_r$, em que $X_i \overset{i.i.d.}{\sim}$ geométrica(p).
- Notações: $Y \sim$ binomial negativa(r, p), $Y \sim \text{bn}(r, p)$.

Para uma dada sequência de “r” sucessos (digamos SFFFSSF...S), temos que sua probabilidade de ocorrência é

$$P(Y = r) = p^r$$

$$P(Y = r + 1) = (1 - p)p^r$$

$$P(Y = r + 2) = (1 - p)^2 p^r$$

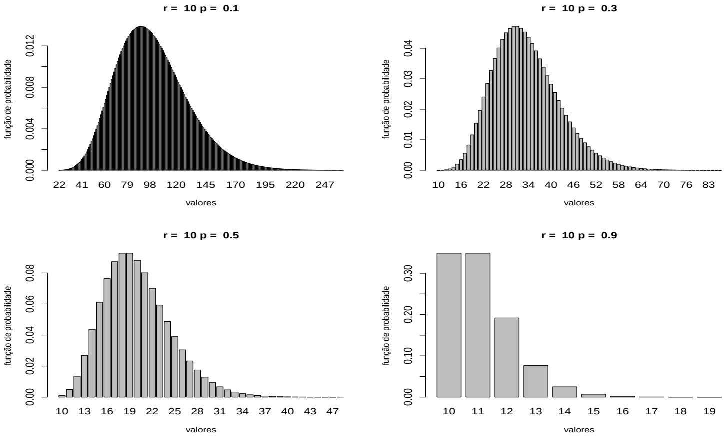
$$\vdots$$

$$P(Y = k) = (1 - p)^{k-r} p^r$$

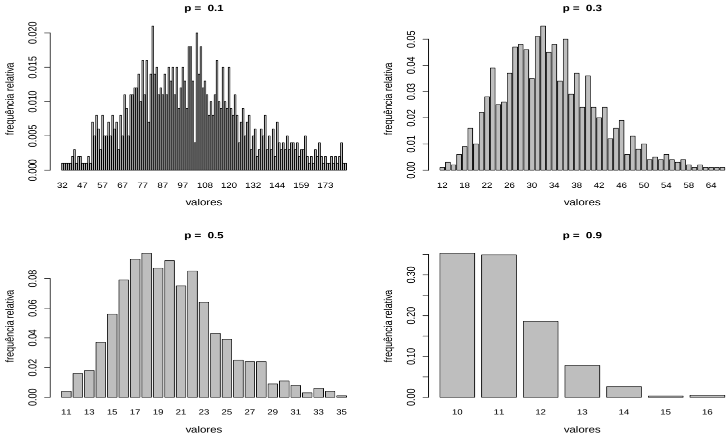
Contudo, para cada sequência de r sucessos e k repetições (a última repetição tem de ser sempre sucesso), temos um total de $\binom{k-1}{r-1}(1 - p)^{k-r} p^r$. Assim

- Obtenção da esperança, variância e demonstração de que $P(Y = k)$ é uma fdp. Já vimos que $P(Y = y) \in [0, 1], \forall y$.
- $E(Y) = E(X_1 + X_2 + ... + X_r) = \dfrac{r}{p}$.
- $V(Y) = V(X_1 + X_2 + ... + X_r) = r\dfrac{1-p}{p^2}$.
- fdp: exercício.
- $F(x) = \sum_{y \leq x} P(Y = x)$.
- $S(x) = \sum_{y > x} P(Y = x)$.

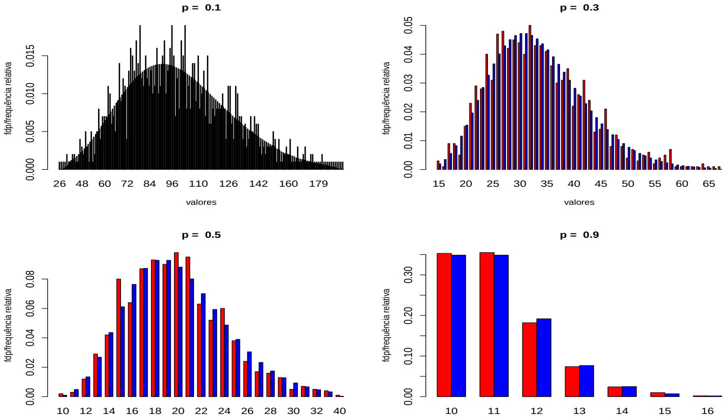
fdp: binomial negativa



valores simulados: binomial negativa



fdp (azul) e valores simulados (vermelho): binomial negativa



Distribuição Hipergeométrica

- População dividida em dois grupos (duas características).
- Extrações casuais sem reposição.
- Detalhes:
  - N objetos.
  - r têm a característica A.
  - $N - r$ têm a característica B.
  - um grupo de n elementos é escolhido ao acaso, dentre os N possíveis, sem reposição.
- Objetivo: calcular a probabilidade de que este grupo de n elementos contenha x elementos com a característica A.

Distribuição Hipergeométrica

- Note que $n < r$ ou $n \geq r$ e $n < N - r$ ou $n \geq N - r$.
- Modelo Geral:

$$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad \forall \;\; max\{0, n - (N - r)\} \leq x \leq min\{r, n\},$$

ou $\mathbb{1}_{\{max\{0,n-(N-r)\},min\{r,n\}\}}(x)$.

- X registra o número de elementos dentre os n sorteados, que possuem a característica A.
- X tem distribuição Hipergeométrica.

Distribuição Hipergeométrica

- Notação: $X \sim hip(N, n, r)$ ou $H \sim$ hipergeométrica(N, n, r).
- X tem distribuição Hipergeométrica com parâmetros N, n, r, então:
    - $E(X) = \dfrac{nr}{N}$
    - $Var(X) = \dfrac{nr}{N}\left(1 - \dfrac{r}{N}\right)\dfrac{(N-n)}{(N-1)}$
    - Pesquisar sobre como calcular a média e a variância e sobre como provar que P(X=x) é uma legítima fdp.

Distribuição Hipergeométrica

- Aplicação: Controle de Qualidade

  Suponha um lote com $N = 100$ elementos a ser analisado. São escolhidas $n = 5$ peças sem reposição. Sabendo que neste lote de 100 elementos, $r = 10$ são defeituosos, a probabilidade de não se obter nenhuma peça defeituosa na amostra retirada é:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{10}{0}\binom{100-10}{5-0}}{\binom{100}{10}} = \frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{10}} \approx 0.584$$

Distribuição Hipergeométrica

- A probabilidade de se obter pelo menos uma peça defeituosa é: $\sum_{i=1}^{5} P(X = i) = 1 - P(X = 0) \approx 0.426$
- $E(X) = \frac{nr}{N} = \frac{5 \times 10}{100}$
- $Var(X) = \frac{nr}{N}\left(1 - \frac{r}{N}\right)\frac{(N-n)}{(N-1)} = \frac{5 \times 10}{100}\left(1 - \frac{10}{100}\right)\frac{(100-10)}{(100-1)} \approx$ 0.409