Princípio de Contagem

- Os conceitos a serem introduzidos nesta seção facilitam o cálculo de probabilidades;
- **Princípio multiplicativo**: Se uma tarefa pode ser executada em duas etapas, a primeira feita de n, e a segunda de m maneiras diferentes, então a tarefa completa pode ser feita de $n \times m$ maneiras diferentes.

Definições

- População: conjunto de objetos ou indivíduos ζ tendo pelo menos uma característica comum observável.
- Amostra: uma amostra de tamanho $n < N$ de um conjunto ζ que possui N elementos é um subconjunto de ζ
  - Ordenada: se os elementos da amostra foram ordenados, ou seja, duas amostras com os mesmos elementos, mas em ordens diferentes serão diferentes amostras
  - Não ordenada: não importa a ordem dos elementos, as amostras serão iguais

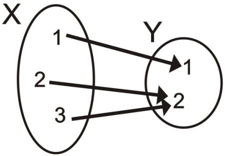
Exemplo

Consideremos uma pesquisa para estudar os salários dos 500 funcionários de uma companhia. Seleciona-se uma amostra de 36 indivíduos. A população é formada pelos 500 salários correspondentes aos 500 funcionários. Consequentemente, a amostra será formada pelos 36 salários dos 36 funcionários selecionados.

- Objetivo: estudar a distribuição dos salários na amostra, esperando que a mesma reflita a distribuição de todos os salários.

Seleção de Amostras

- Consideremos dois conjuntos:
  - $X = \{1, 2, ..., n\}$
  - $Y = \{1, 2, ..., m\}$
  - por exemplo: $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{1, 2\}$



Seleção de Amostras

- No diagrama, as aplicações exemplificadas são:
  - $f(1) = 1$
  - $f(2) = 2$
  - $f(3) = 2$
- Quantas aplicações são possíveis no total?
  - 1 em X possui duas possibilidades em Y
  - 2 em X possui duas possibilidades em Y
  - 3 em X possui duas possibilidades em Y

  Portanto, $2 \times 2 \times 2 =$ total de aplicações entre X e Y

Seleção de Amostras

- No caso geral, $X = \{1, 2, ..., n\}$ e $Y = \{1, 2, ..., m\}$

  $m^n =$ total de aplicações entre X e Y

- Note que são permitidas as associações de pontos diferentes no domínio (X) ao mesmo ponto da imagem (Y)

Seleção de Amostras

- Considere agora que o interesse é em aplicações 1 : 1
- $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (um elemento na imagem corresponde a um único elemento no domínio)
- $X = \{1, 2, ..., n\} \xrightarrow{f} Y = \{1, 2, ..., m\}$, $m \geq n$
  - 1 em X possui m possibilidades em Y
  - 2 em X possui $(m-1)$ possibilidades em Y
  - $\vdots$
  - n em X possui $(m-(n-1))$ possibilidades em Y portanto, $m(m-1)...(m-(n-1)) =$ total de aplicações 1 : 1 entre X e Y

Seleção de Amostras

- Lema: o número de amostras ordenadas *com reposição*, de tamanho n, tiradas de um conjunto com N elementos é N^n (número de aplicações $= N^n$)
- Lema: o número de amostras ordenadas *sem reposição*, de tamanho n tiradas de um conjunto com N elementos é $N(N-1)\dots(N-(n-1))$ (número de aplicações $1:1$ $= N(N-1)\dots(N-(n-1)))$

Análise Combinatória

Seja X um conjunto finito com m elementos, e $n \leq m$.

- Desejamos saber quantos subconjuntos com n elementos tem X
  - exemplo: $X = \{1, 2, 3, 4\}$
  - quantos subconjuntos com 3 elementos há em X?

$\{1,2,3\}*_1$	$\{2,1,3\}*_1$	$\{3,1,2\}*_1$	$\{4,1,2\}*_2$
$\{1,2,4\}*_2$	$\{2,1,4\}*_2$	$\{3,1,4\}*_3$	$\{4,1,3\}*_3$
$\{1,3,2\}*_1$	$\{2,3,1\}*_1$	$\{3,2,1\}*_1$	$\{4,2,1\}*_2$
$\{1,3,4\}*_3$	$\{2,3,4\}*_4$	$\{3,2,4\}*_4$	$\{4,2,3\}*_4$
$\{1,4,2\}*_2$	$\{2,4,1\}*_2$	$\{3,4,1\}*_3$	$\{4,3,1\}*_3$
$\{1,4,3\}*_3$	$\{2,4,3\}*_4$	$\{3,4,2\}*_4$	$\{4,3,2\}*_4$

Análise Combinatória

- Observe que os subconjuntos marcados com $(*_1, *_2, *_3, *_4)$ possuem os mesmos elementos, apenas com outra ordem:
- Assim, o total de subconjuntos com 3 elementos de um conjunto com 4 elementos é dado por $\frac{4!}{3!1!}$

Análise Combinatória

- Resumo

Repetição	Ordenação	número de amostras possíveis
Sim	Importa	N^n
Sim	Não importa	—
Não	Importa	$\frac{N!}{(N-n)!}$
Não	Não importa	$\frac{N!}{(N-n)!n!}$

Análise Combinatória

- No caso geral, o número total de subconjuntos com n elementos de um conjunto com $m \geq n$ é dado por $\frac{m!}{n!(m-n)!}$
- Lema: o número de amostras não ordenadas de tamanho n tiradas de um conjunto com N elementos é igual a $\frac{N!}{n!(N-n)!}$
- Exemplo: Uma comissão formada por 3 estudantes tem que ser selecionada numa classe de 20 alunos, para organizar os jogos olímpicos. De quantas formas diferentes pode ser selecionada essa comissão?

  Resposta: $\frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{6} = 1140$

Análise Combinatória

- Exemplo: Um ônibus possui 10 assentos disponíveis. De quantas formas 7 passageiros podem ocupar os assentos?

  Resposta: $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 604800$

- Exemplo: Quantos números de 4 dígitos podemos formar com os dígitos 1,2,3,4,5,6?

  Resposta: $6^4 = 1296$

Análise Combinatória

- Definição: A amostra casual simples de tamanho n de uma variável aleatória (v.a.) X com uma dada distribuição é um conjunto de n realizações da variável X, digamos $(x_1, x_2, ..., x_n)$.
- Exemplo
  - Variável: salários
  - Amostra casual simples: os 36 salários que constituem os dados da tabela dada

Determinando Amostras e Calculando Probabilidades

- Exemplo: formar números de 4 dígitos com os dígitos 1,2,3,4,5,6
  - total : 6^4 amostras
  - os dois primeiros dígitos são, necessariamente, iguais entre si, e os dois últimos, diferentes desses primeiros: $6 \times 1 \times 5 \times 5$ amostras
  - qual a probabilidade, de escolher um número ao acaso (formado por 4 dígitos), e este possuir os dois primeiros dígitos necessariamente iguais entre si, e os dois últimos, diferentes desses primeiros:

    Resposta: $\frac{6\times1\times5\times5}{6^4} = \frac{5\times5}{6^3} = \frac{25}{216} \approx 0,12$

- Exemplo: formar números de 4 dígitos com os dígitos 1,2,3,4,5,6
  - total : 6^4 amostras
  - os dois primeiros dígitos podem ou não ser iguais entre si, e os dois últimos, diferentes desses primeiros: temos dois casos.
    - Os dois primeiros iguais entre si: $6 \times 1 \times 5 \times 5$ amostras.
    - Os dois primeiros diferentes entre si: $6 \times 5 \times 4 \times 4$ amostras.
  - qual a probabilidade, de escolher um número ao acaso (formado por 4 dígitos), e este possuir os dois primeiros dígitos iguais ou não entre si, e os dois últimos, diferentes desses primeiros:

    Resposta: $\frac{6\times1\times5\times5+6\times5\times4\times4}{6^4} = \frac{25+80}{216} = \frac{105}{216} \approx 0,49$