Metodologia para tomada de decisões

- **Exemplo** Se o nosso objetivo é estimar o valor (desconhecido) de alguma proporção p de interesse (associada à determinada população de interesse), tomamos como base o número de elementos $X = x$, dessa população, em uma amostra casual simples de tamanho n. O objetivo é verificar se $X = x$ dá suporte à rejeição ou não de uma certa conjectura acerca de p.

Metodologia para tomada de decisões

- **Exemplo 1:** Achamos que uma moeda não é honesta. Observamos 65 caras em 100 lançamentos. Podemos afirmar que os dados suportam nossa opinião?
- **Exemplo 2:** A diretoria de um provedor de internet acredita que com a reengenharia de seu sistema, a proporção de de assinantes satisfeitos com o serviço é agora maior do que os 82% anteriores. Se uma pesquisa com 300 assinantes revela que 251 deles estão satisfeitos com o provedor, a diretoria pode dizer que esses dados dão suporte à sua opinião?

Metodologia

- **Exemplo 3:** Se em uma amostra casual simples de 2100 observações do desempenho de uma rede de computadores, apenas 181 resultaram em um mau desempenho, é possível dizer que os dados suportam a conjectura (da instituição mantenedora dessa rede) de que menos de 10% das performances foram ruins?

Metodologia

- Se nosso objetivo é calcular ou estimar o valor desconhecido da proporção p de indivíduos em uma população que possui um determinado atributo, consideramos uma variável aleatória X que representa o número total de de portadores do atributo, em uma amostra casual simples de tamanho n desses indivíduos.
- O objetivo é determinar se o valor x de X, observado na amostra, dá ou não suporte à uma hipótese concernente ao valor de p.

Metodologia

- Portanto, quando estamos interessados em estudar uma proporção p, baseamos nossa inferência em:
  - $X \sim \text{binomial}(n, p)$ (número de sucesso).
  - $E(X) = np$
  - $Var(X) = np(1-p)$
- Para valores adequados de n e p (ou n muito grande):
  - $\dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \dfrac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$

Metodologia

- Relativo ao exemplo 1:
  - O que aconteceria em 100 lançamentos se a moeda fosse honesta $(p = \frac{1}{2})$?
    - O número esperado de caras nos 100 lançamentos será 50.
  - Comparado com essa expectativa, o que foi observado?
    - Observamos um desvio de $|65 - 50| = 15$ unidades em relação ao número esperado de caras.

Metodologia

- Relativo ao exemplo 1:
  - Se a moeda for honesta, um desvio como o observado será pouco ou muito provável?

    • Se a moeda fosse honesta, teríamos que:

    $p - valor = P(|X - 50| \geq 15) \simeq P(|Z| \geq 3) \simeq 0.0027$

    • Podemos usar o $p - valor$ para medir a magnitude da evidência contida nos dados contra a hipótese de honestidade da moeda.

Metodologia

- Relativo ao exemplo 1:
  - Como decidir se a evidência com base no $p - valor$ é contundente para rejeitar a suposição de honestidade da moeda?
    - Escolhemos um valor α (nível de significância)
    - Se $p - valor \leq \alpha$, reconhecemos na amostra evidência suficiente para rejeitar a honestidade da moeda (rejeitar H_0).
  - $H_0 : p = \frac{1}{2} \quad vs \quad H_1 : p \neq \frac{1}{2}$
    - para $\alpha \geq 0.0027$, rejeitamos H_0 com nível de significância α (associado probabilidade de cometer-se o erro do tipo I).

Hipóteses Alternativas Unilaterais e Bilaterias

- **Exemplo 1:** $H_0 : p = \frac{1}{2} \quad vs \quad H_1 : p \neq \frac{1}{2}$
- **Exemplo 2:** $H_0 : p = 0.82 \quad vs \quad H_1 : p > 0.82$
- **Exemplo 3:** $H_0 : p = 0.1 \quad vs \quad H_1 : p < 0.1$

Hipótese unilateral: quando a hipótese alternativa corresponde a $<$ ou $>$.

Hipótese Bilateral: quando a hipótese alternativa corresponde a $\neq$.

Hipóteses Alternativas Unilaterais e Bilaterias

- Relativo ao exemplo 2:
  - $X =$ número de clientes satisfeitos
  - Sob H_0 verdadeira:
    - $X \sim \text{binomial}(300, 0.82)$
    - $E(X) = 300 \times 0.82$
    - $Var(X) = 300 \times 0.82 \times 0.18$
  - $p-valor = P\left(\frac{X-300\times0.82}{\sqrt{300\times0.82\times0.18}} \geq \frac{251-300\times0.82}{\sqrt{300\times0.82\times0.18}}\right) \simeq P(Z \geq 0.7514) \simeq 0.2266$ • onde $Z \sim N(0,1)$
  - Logo, para $\alpha \geq 0.2266$, rejeitamos H_0

Observação: os valores usuais de α são 0.01, 0.05 e 0.1.

Hipóteses Alternativas Unilaterais e Bilaterias

- Relativo ao exemplo 3:
  - X = número desempenhos insatisfatórios
  - Sob H_0 verdadeira:
    - $X \sim \text{binomial}(2100, 0.10)$
    - $E(X) = 2100 \times 0.10$
    - $Var(X) = 2100 \times 0.10 \times 0.90$
  - $p - valor = P\left(\frac{X - 2100 \times 0.10}{\sqrt{2100 \times 0.10 \times 0.90}} \leq \frac{181 - 2100 \times 0.10}{\sqrt{2100 \times 0.10 \times 0.90}}\right) \simeq P(Z \leq -2.11) \simeq 0.0174$ • onde $Z \sim N(0, 1)$
  - Logo, para $\alpha \geq 0.0174$, rejeitamos H_0

Teste de Proporções

- $H_0 : p = p_0 \quad vs \quad H_1 : p \neq p_0$

  $H_0 : p = p_0 \quad vs \quad H_1 : p > p_0$

  $H_0 : p = p_0 \quad vs \quad H_1 : p < p_0$

- Procedimento
  - escolha α (nível de significância) - limite máximo da probabilidade de se cometer o erro tipo I
  - selecione uma amostra casual simples da população e determine o número x de indivíduos portadores do atributo
  - determine o $p - valor$ ou força de evidência contida nos dados
  - se $p - valor \leq \alpha$, rejeita-se H_0

Cálculo do $p - valor$

- $H_1 : p \neq p_0$
  - $X \sim Bin(n, p)$

    $$p - valor = P(X - np_0 \geq |x - np_0|)$$
    $$p - valor = 1 - P(np_0 - |x - np_0| < X < np_0 + |x - np_0|)$$

  - usando o TCL $(Z \sim N(0, 1))$

    $$p - valor = P(X - np_0 \geq |x - np_0|)$$
    $$p - valor \simeq P\left(Z \geq \frac{|x - np_0|}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}\right)$$
    $$p - valor \simeq 2\left[1 - \Phi\left(\frac{|x - np_0|}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}\right)\right]$$

Cálculo do $p - valor$

- $H_1 : p > p_0$
  - $X \sim Bin(n, p)$

    $$p - valor = P(X \geq x)$$
  - usando o TCL ($Z \sim N(0,1)$)

    $$p - valor = P(X - np_0 \geq x - np_0)$$
    $$p - valor \simeq P\left(Z \geq \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right)$$
    $$p - valor \simeq 1 - \Phi\left(\frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right)$$

Cálculo do $p - valor$

- $H_1 : p < p_0$
  - $X \sim Bin(n, p)$

    $$p - valor = P(X \leq x)$$
  - usando o TCL $(Z \sim N(0,1))$

    $$p - valor = P(X - np_0 \leq x - np_0)$$

    $$p - valor \simeq P\left(Z \leq \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right)$$

    $$p - valor \simeq \Phi\left(\frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right)$$

Cálculo do $p - valor$

- **Observação:** As hipóteses para o exemplo 3 são:

  $H_0 : p = 0.1 \quad vs \quad H_1 : p < 0.1$

- Nesse tipo de situação, é suficiente calcular $p - valor$ considerando o valor $(p = 0.1)$, por isso:

  $H_0 : p \geq 0.1 \quad vs \quad H_1 : p < 0.1$

  é equivalente a testar

  $H_0 : p = 0.1 \quad vs \quad H_1 : p < 0.1$

- Comentário análogo vale quando as hipóteses forem

  $H_0 : p = 0.1 \quad vs \quad H_1 : p > 0.1.$

- Embora o p-valor seja mais comumente usado, quase sempre é necessário emprego de recursos computacionais para calculá-lo.
- Uma forma que prescinde de tal recurso consiste em estabelecer, diretamente, as áreas de rejeição e aceitação, fixando-se um nível de significância α (controle da probabilidade e ocorrência do erro do tipo I).
- Procedimento: fixando-se um valor para α, encontra-se um valor crítico z_r, comparando o valor calculado da estatística z_c, consoante a forma da hipótese alternativa.

- $H_1 : p < p_0$:
  - $P(Z \leq z_r | H_0) = \alpha$.
  - Se $z_c \leq z_r$ rejeita-se H_0, caso contrário, não se rejeita.
  - Em que $z_c = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$.

- $H_1 : p > p_0$.
  - $P(Z \geq z_r | H_0) = \alpha$.
  - Se $z_c \geq z_r$ rejeita-se H_0, caso contrário, não se rejeita.
  - Em que $z_c = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$.

- $H_1 : p \neq p_0$.
- $P(Z \leq z_r | H_0) = 1 - \alpha/2$.
- Se $|z_c| \geq z_r$ rejeita-se H_0, caso contrário, não se rejeita.
- Em que $z_c = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$.

- Voltando ao exemplo 1, temos que $z_c = \dfrac{0,65 - 0,50}{\sqrt{0,5 \times 0,5/100}} = 3,00.$ Assumindo $\alpha = 0,05$ e dado que $H_1 : p \neq 1/2$, temos que $z_r = 1,96$. Assim, como $3,00 > 1,96$, rejeita-se H_0 ao nível de significância de 0,05.

- Voltando ao exemplo 2, temos que $z_c = \dfrac{0,84 - 0,82}{\sqrt{0,82 \times 0,18/300}} = 0,785$. Assumindo $\alpha = 0,01$ e dado que $H_1 : p > 0,82$, temos que $z_r = 2,33$. Assim, como $0,785 < 2,33$, não se rejeita H_0 ao nível de significância de 0,05.

- Voltando ao exemplo 3, temos que $z_c = \dfrac{0,09 - 0,10}{\sqrt{0,10 \times 0,90/2100}} = -2,11$. Assumindo $\alpha = 0,10$ e dado que $H_1 : p < 0,1$, temos que $z_r = -1,28$. Assim, como $-2,11 > -1,28$, rejeita-se H_0 ao nível de significância de 0,05.

- No caso de testes relativos a média da população (μ), os desenvolvimentos são análagos aos da proporção. Veja a notação nos slides sobre intervalo de confiança.
- Hipóteses de interesse: $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 :< \mu_0$, $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$ e $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$

- Se σ^2 for conhecido, a estatística do teste será $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ tal que, sob H_0, $Z \sim N(0,1)$ (exata ou aproximada). Seja ainda $z_c = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ o valor calculado da estatística do teste.
- Se σ^2 for desconhecido, a estatística do teste será $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\widehat{\sigma}^2/n}}$ tal que, sob H_0, $T \sim t_{(n-1)}$ (exata ou aproximada). Seja ainda $t_c = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sqrt{\widetilde{\sigma}^2/n}}$ o valor calculado da estatística do teste.

Cálculo do $p - valor$

- $H_1 : \mu \neq \mu_0$
  - σ^2 conhecido

    $p - valor = 2(1 - P(Z \leq z_c | H_0))$
  - σ^2 desconhecido

    $p - valor = 2(1 - P(T \leq t_c | H_0))$

Cálculo do $p - valor$

- $H_1 : \mu < \mu_0$
  - σ^2 conhecido

    $p - valor = P(Z \leq z_c | H_0)$
  - σ^2 desconhecido

    $p - valor = P(T \leq t_c | H_0)$

Cálculo do $p - valor$

- $H_1 : \mu > \mu_0$
  - σ^2 conhecido

    $p - valor = P(Z \geq z_c | H_0)$
  - σ^2 desconhecido

    $p - valor = P(T \geq t_c | H_0)$

- Utilizando as regiões crítica e de aceitação.
- $H_1 : \mu < \mu_0$.
- σ^2 conhecido.
  - $P(Z \leq z_r | H_0) = \alpha$.
  - Se $z_c \leq z_r$ rejeita-se H_0, caso contrário, não se rejeita.
- σ^2 desconhecido.
  - $P(T \leq t_r | H_0) = \alpha$.
  - Se $t_c \leq t_r$ rejeita-se H_0, caso contrário, não se rejeita.

- Utilizando as regiões crítica e de aceitação.
- $H_1 : \mu > \mu_0$.
- σ^2 conhecido.
  - $P(Z \leq z_r | H_0) = 1 - \alpha$.
  - Se $z_c \geq z_r$ rejeita-se H_0, caso contrário, não se rejeita.
- σ^2 desconhecido.
  - $P(T \leq t_r | H_0) = 1 - \alpha$.
  - Se $t_c \geq t_r$ rejeita-se H_0, caso contrário, não se rejeita.

- Utilizando as regiões crítica e de aceitação.
- $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
- σ^2 conhecido.
  - $P(Z \leq z_r | H_0) = 1 - \alpha/2$.
  - Se $|z_c| \geq z_r$ rejeita-se H_0, caso contrário, não se rejeita.
- σ^2 desconhecido.
  - $P(T \leq t_r | H_0) = 1 - \alpha/2$.
  - Se $|t_c| \geq t_r$ rejeita-se H_0, caso contrário, não se rejeita.