Processos estocásticos

- Área da probabilidade que trata de conjuntos (sequências) de variáveis aleatórias que apresentam alguma estrutura de dependência entre si.
- Estendem os conceitos de probabilidade vistos até agora.
- As variáveis aleatórias envolvidas, em geral, são medidas em função de alguma condição de avaliação como o tempo, espaço, distância etc.

Exemplo

- O desempenho de uma rede de computadores é medido a cada minuto. Se, num dado minuto o sistema está com bom desempenho, atribuímos sucesso (valor 1) e 0, caso contrário (desempenho ruim).
- Neste caso, podemos definir $X_1, X_2, \ldots$ em que $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$.
- Contudo, diferentemente de outros exemplos, espera-se que exista uma certa estrutura de dependência entre tais variáveis.

Exemplo

- Neste exemplo temos um processo estocástico em tempo discreto, porque as variáveis são observadas em pontos separados (ou discretos) de (do) tempo, ao invés de continuamente no tempo.
- X_0 é o estado inicial e X_n, n $=$ 1, 2, . . . é o estado do processo no tempo n. No exemplo, cada estado deve corresponder a um valor no conjunto $\{0, 1\}$.

Definições matemáticas

- Um processo estocástico $\{X(t), t \in T\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias.
- Para cada t, X(t) é uma variável aleatória.
- Para cada $t_1, t_2, ..., t_k$, $(X(t_1), ..., X(t_k))^t$ é um vetor aleatório.
- Se $T \subseteq R$ temos um processo estocástico em tempo contínuo, por exemplo, $X(t), t \geq 0$ (Exemplo: eletrocardiograma).
- Caso contrário, temos um processo estocástico em tempo discreto, por exemplo, $\{X(t), t = 1, 2, ...\}$.

Definições matemáticas

- O espaço de estados de um processo estocástico é o conjunto de todos os possíveis valores que as variáveis aleatórias $X(t)$, $t = 1, 2, ...$ podem assumir.
- O espaço de estados pode ser discreto (e.g. o número de chamadas que chegam a uma central telefônica a cada 2 horas, ou a condição de um sistema de computadores) ou contínuo (e.g. a temperatura do ar em uma localidade observada em intervalos de 1 hora, ou a pressão arterial de um indivíduo, medida continuamente)

Voltando ao exemplo

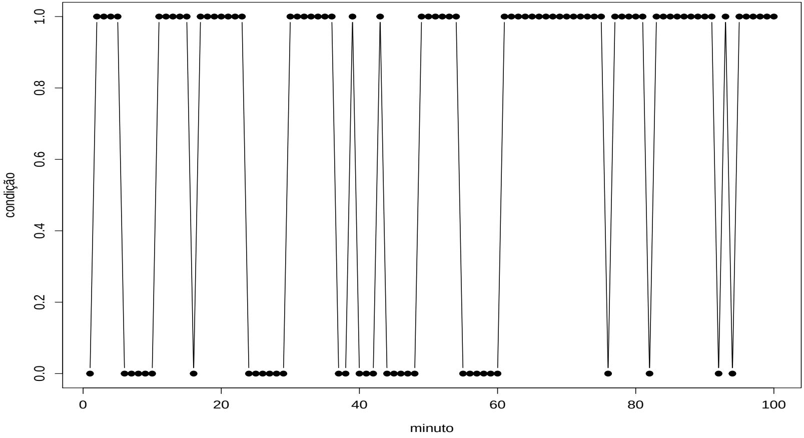
- Vamos assumir que a condição do sistema (descrito anteriormente) em um dado minuto, depende apenas de sua condição no minuto anterior, através da seguinte **matriz de transição**

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Voltando ao exemplo

- Essa matriz indica que $P(X(t) = 0|X(t-1) = 0) = 0,6$, $P(X(t) = 1|X(t-1) = 0) = 0,4$, $P(X(t) = 0|X(t-1) = 1) = 0,1$ e $P(X(t) = 1|X(t-1) = 1) = 0,9$.
- Ou seja, ela nos fornece as probabilidades de que o sistema permaneça ou mude de estado no futuro seguinte, dado o presente.

Simulação do comportamento do sistema em questão



Distribuição estacionára

- Sob certas condições, para um número suficientemente grande de observações, o comportamento estocástico do sistema (pode passar) a não depender mais do passado.
- Dizemos que $\boldsymbol{\pi} = (p_0, p_1)^t$ é a distribuição estacionária do processos $P(X(t) = i) = p_i, i = 0, 1$, se $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi}$, em que

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array} & \begin{pmatrix} p_{00} & p_{10} \\ p_{01} & p_{11} \end{pmatrix} \end{array}$$

e $p_{ij} = P(X(t) = i | X(t-1) = j)$.

Distribuição estacionára

- Note que

$$p_0 = p_{00}p_0 + p_{10}p_1$$

$$p_1 = p_{10}p_0 + p_{11}p_1$$

Como $p_1 + p_0 = 1$, podemos, na segunda equação, por exemplo, fazer

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{10}(1 - p_1) + p_1 1 p_1 \rightarrow \\ p_1(1 - p_{11} + p_{10}) &= p_{10} \rightarrow p_1 = \frac{p_{10}}{1 - p_{11} + p_{10}} \end{aligned}$$

Distribuição estacionára

- Por outro lado, $p_0 = 1 - p_1 = \frac{1-p_{11}}{1-p_{11}+p_{10}}$. Assim

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{p_{10}}{1 - p_{11} + p_{10}}, \frac{1 - p_{11}}{1 - p_{11} + p_{10}} \right)^t .$$

- De modo equivalente,

$$\boldsymbol{\pi}^{(t)} = \boldsymbol{\pi}^{(t-1)}\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\pi}^{(t-2)}\boldsymbol{P})\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\pi}^{(t-3)}\boldsymbol{P})\boldsymbol{P}^2 = \ldots = \boldsymbol{\pi}^{(0)}\boldsymbol{P}.$$

- Voltando ao exemplo, temos que $\boldsymbol{\pi} = (0,2; 0,8)^t$.

Simulação do comportamento do sistema em questão