

1. Questão 1

- a) É o incremento (positivo/negativo) na resposta esperada para o aumento em uma unidade no valor da covariável.

$$\mathcal{E}(Y_i|x_i + 1) - \mathcal{E}(Y_i) = \beta$$

- b) Temos que:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^n [Y_i - \beta(x_i - \bar{x})]^2 \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial \beta} = -2 \sum_{i=1}^n [Y_i - \beta(x_i - \bar{x})] (x_i - \bar{x}) \\ &= -2 \sum_{i=1}^n Y_i(x_i - \bar{x}) + 2\beta \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ \rightarrow \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n Y_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}; \frac{\partial^2 Q}{\partial \beta^2} = 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \end{aligned}$$

- c) Temos que

$$\begin{aligned} L(\beta) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{[Y_i - \beta(x_i - \bar{x})]^2}{x_i} \right\} \\ \rightarrow l(\beta) &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{[Y_i - \beta(x_i - \bar{x})]^2}{x_i} + c \\ \rightarrow S(\beta) &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{[Y_i - \beta(x_i - \bar{x})] (x_i - \bar{x})}{x_i} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{[Y_i(x_i - \bar{x})]}{x_i} - \beta \sum_{i=1}^n \frac{[(x_i - \bar{x})^2]}{x_i} \right\} \rightarrow \beta = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{[Y_i(x_i - \bar{x})]}{x_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{[(x_i - \bar{x})^2]}{x_i}} \\ H(\beta) &= -\sum_{i=1}^n \frac{[(x_i - \bar{x})^2]}{x_i}; I(\beta) = \sum_{i=1}^n \frac{[(x_i - \bar{x})^2]}{x_i} \end{aligned}$$

d) Temos que

$$\mathcal{E}(\widehat{\beta}_{MQO}) = \beta; \mathcal{V}(\widehat{\beta}_{MQO}) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x})^2}{\left[ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^2}$$

$$\mathcal{E}(\widehat{\beta}_{MV}) = \beta; \mathcal{V}(\widehat{\beta}_{MV}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{x_i} / \left( \sum_{i=1}^n \frac{[(x_i - \bar{x})^2]}{x_i} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{x_i}}$$

Note que  $(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i})$  deve divergir, eu coloque na prova que deve convergir)

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^n \frac{[(x_i - \bar{x})^2]}{x_i} = \sum_{i=1}^n \left( x_i - 2\bar{x} + \bar{x}^2 \frac{1}{x_i} \right) = \sum_{i=1}^n x_i - 2 \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \\ &= \bar{x}^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\frac{\mathcal{V}(\widehat{\beta}_{MV})}{\mathcal{V}(\widehat{\beta}_{MQO})} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{x_i}} \frac{[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2]^2}{\sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x})^2}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \approx \mu_2 - \mu^2 = \sigma_X^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^3 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^3 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i^2 + n\bar{x}^3 \\ &\rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x})^2 \approx \mu_3 - 2\mu\mu_2 + \mu^3 \end{aligned}$$

Então, para  $n$  suficientemente grande, temos que:

$$\frac{\mathcal{V}(\widehat{\beta}_{MV})}{\mathcal{V}(\widehat{\beta}_{MQO})} = \frac{n^2}{n \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{x_i}} \frac{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i (x_i - \bar{x})^2} \approx \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{x_i}} \approx \frac{1}{a} \in (0, 1], a \geq 1$$

## 2. Questão 2

a) Temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(Y_{1j}|x_{1j}) &= \beta_1 x_{1j} + \gamma_1 x_{1j}^2 \\ \mathcal{E}(Y_{2j}|x_{2j}) &= \alpha_2 + \gamma_2 x_{2j}^2\end{aligned}$$

Tipo de solo 1:  $\beta_1 + \gamma_1$  é o valor esperado da produção para uma quantidade de fertilizante igual a 1.  $-\frac{\beta_1}{2\gamma_1}$  é a quantidade de fertilizante que leva à produção máxima.

Tipo de solo 2:  $\alpha_2$  é o valor esperado da produção para uma quantidade de fertilizante nula.  $\frac{\partial \mathcal{E}(Y_{2j}|x_{2j})}{\partial x_{2j}} = -2\gamma_2 x_{2j}$  é a taxa de crescimento/decrescimento da produção em função da quantidade de fertilizantes

b) Temos que:

Tipo de solo 1:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(Y_{1j}|x_{1j} + 1) &= \beta_1 + \beta_1 x_{1j} + \gamma_1 + 2\gamma_1 x_{1j} + \gamma_1 x_{1j}^2 \\ \rightarrow \mathcal{E}(Y_{1j}|x_{1j} + 1) - \mathcal{E}(Y_{1j}|x_{1j}) &= (\beta_1 + \gamma_1) + 2\gamma_1 x_{1j}\end{aligned}$$

Analogamente, para o tipo de solo 2:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(Y_{2j}|x_{2j} + 1) &= \alpha_2 + \gamma_2 x_{2j}^2 + 2\gamma_2 x_{2j} + \gamma_2 \\ \rightarrow \mathcal{E}(Y_{2j}|x_{2j} + 1) - \mathcal{E}(Y_{2j}|x_{2j}) &= \gamma_2 + 2\gamma_2 x_{2j}\end{aligned}$$

Tipo de solo 1: os parâmetros  $(\beta_1, \gamma_1)$  estão relacionados ao incremento na produção para o aumento de uma unidade no fertilizante. Particularmente,  $\gamma_1$  controla o impacto desse aumento na produção. Se  $x_{1j} = 0$  então o incremento é igual a  $\beta_1 + \gamma_1$ .

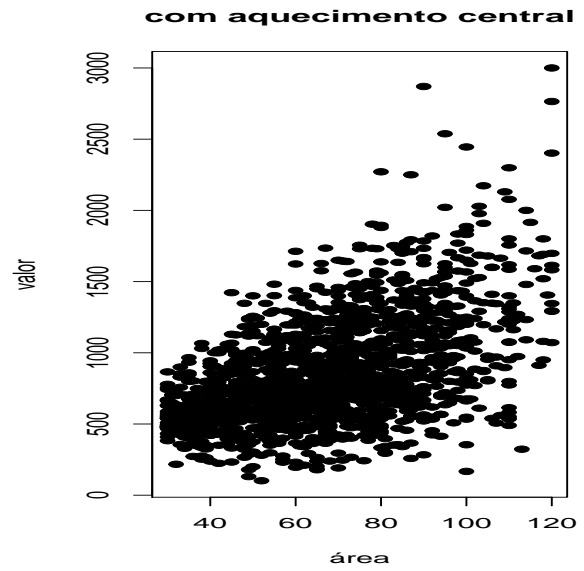
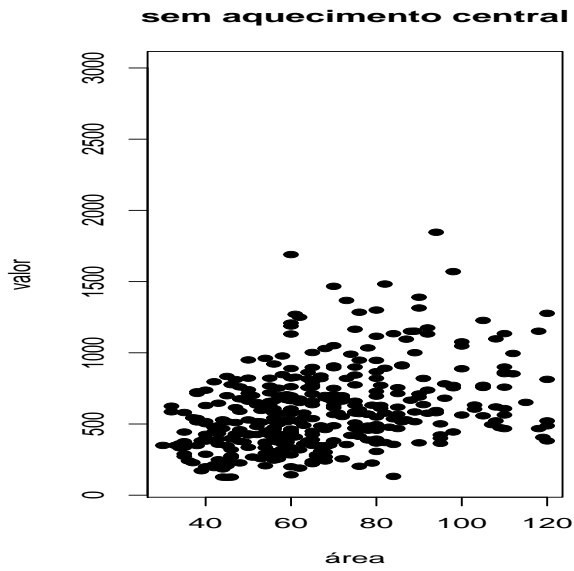
Tipo de solo 2: somente o parâmetro  $\gamma_2$  está relacionado ao incremento na produção para o aumento de uma unidade no fertilizante. Tal parâmetro controla o impacto desse aumento na produção. Se  $x_{2j} = 0$  então o incremento é igual a  $\gamma_2$ .

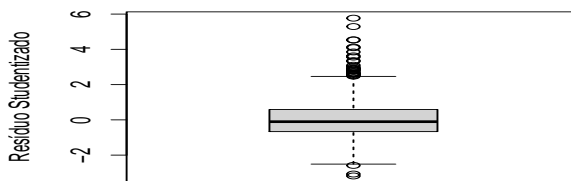
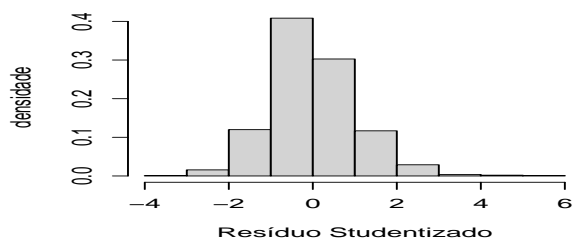
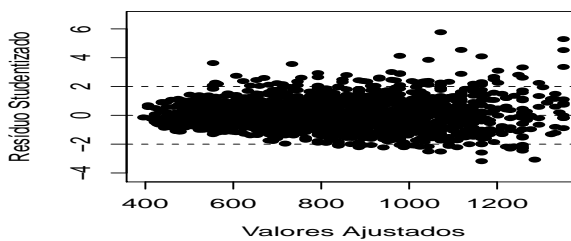
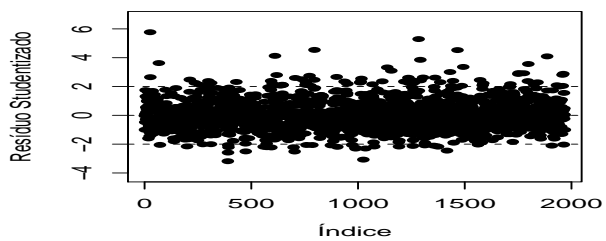
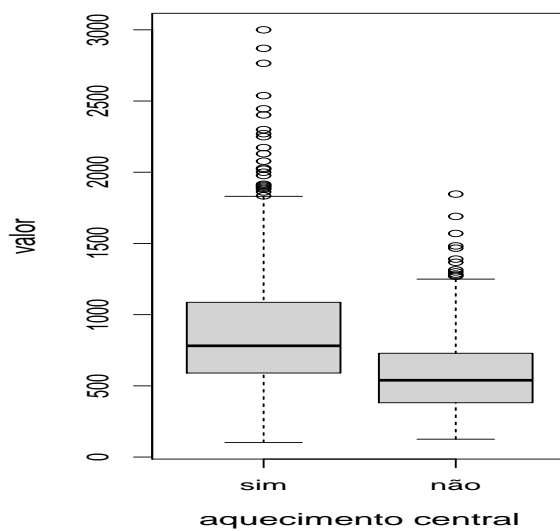
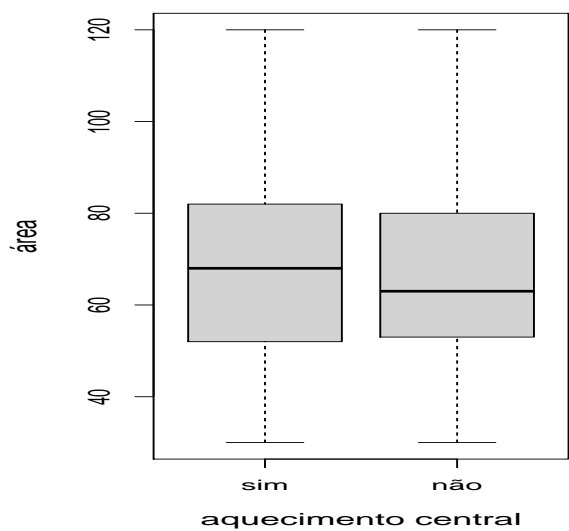
c) Temos que:

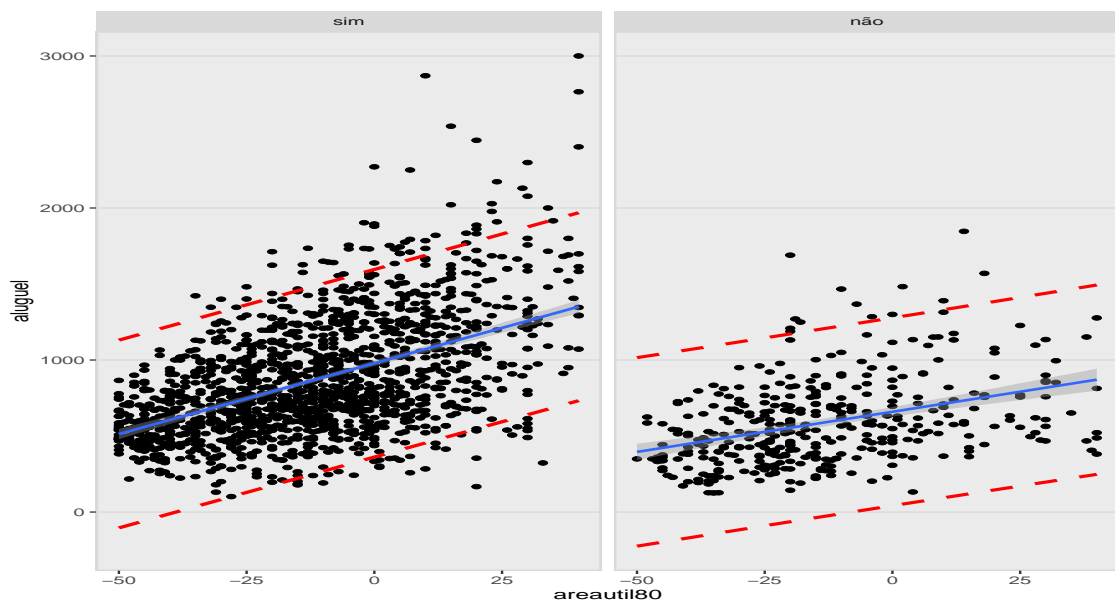
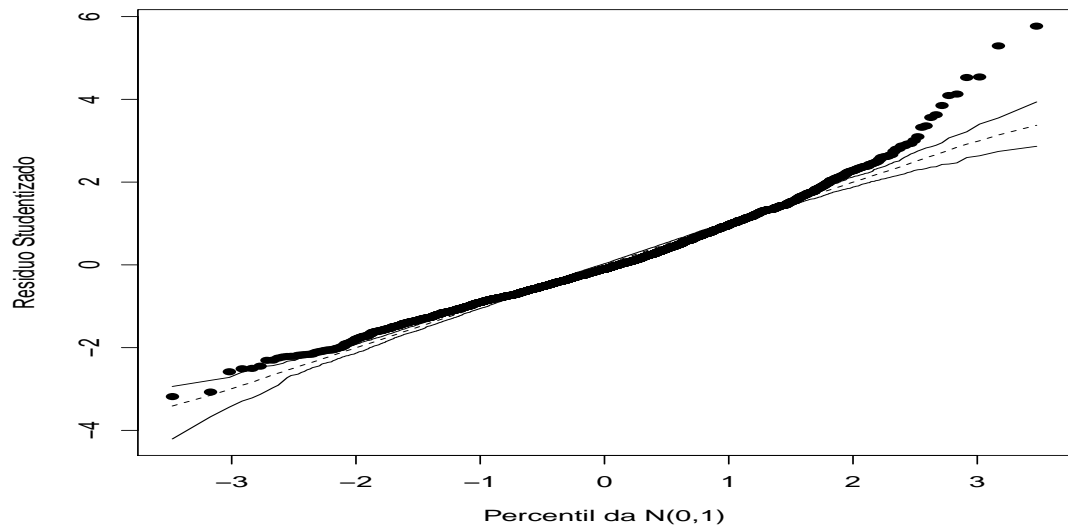
$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{23} \end{bmatrix}; \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{11}^2 & 0 & 0 \\ x_{12} & x_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_{21}^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_{22}^2 \\ 0 & 0 & 1 & x_{23}^2 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \alpha_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{12} \\ \xi_{21} \\ \xi_{22} \\ \xi_{23} \end{bmatrix}$$

### 3. Questão 3

Temos que (as informações abaixo não pretendem ser exaustivas).







Par.	Est.	EP	IC(95%)	Estat. t	p-valor
$\alpha_1$	978,595	9,128	[960,693 ; 996,496]	107,209	< 0,0001
$\alpha_2$	659,526	18,951	[622,359 ; 696,693]	34,801	< 0,0001
$\beta_1$	9,307	0,378	[8,565 ; 10,049]	24,612	< 0,0001
$\beta_2$	5,279	0,776	[3,757 ; 6,802]	6,799	< 0,0001

Intercepto: Estadística  $F = 230,08$ ,  $p\text{-valor} < 0,0001$ ; Coeficientes angulares; Estadística  $F = 21,75$  <,  $p\text{-valor} < 0,0001$ .