1. Questão 1

   (a) Temos que

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x};\theta) &= \theta^n (1-\theta)^{n\overline{x}-n}\, \mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}) = \exp\left\{n\overline{x}\ln(1-\theta) + n\ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\right\} \mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}) \\
&= \exp\left\{c(\theta)t(\boldsymbol{x}) + d(\theta)\right\} \mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}) \\
&= \exp\left\{\eta t(\boldsymbol{x}) + d_0(\eta)\right\} \mathbb{1}_A(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

   em que $c(\theta) = \ln(1-\theta)$, $t(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$, $A = \mathcal{N}^n$, $d(\theta) = n\ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$, $\eta = \ln(1-\theta) \rightarrow \theta = 1-e^{\eta}$, $d_0(\eta) = n\ln\left(\frac{1-e^{\eta}}{e^{\eta}}\right) = n\left(\ln(1-e^{\eta}) - \eta\right)$, $\Theta_\eta = I\!R^-$ que contem segmentos de rera, assim, T é suficiente, minimal e completa.

   (b) Temos que $\mathcal{E}\left(\frac{T}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_1^n \mathcal{E}(X_i) = \frac{1}{\theta}$. Por LS, $\frac{T}{n}$ é o ENVVUM de θ.

   (c) Temos que

$$
\begin{aligned}
L(\theta) &\propto \theta^n (1-\theta)^{n\overline{x}-n} \rightarrow n\ln\theta + n(\overline{x}-1)\ln(1-\theta) \\
S(\theta) &= \frac{n}{\theta} - \frac{n(\overline{x}-1)}{1-\theta}, H(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} - \frac{n(\overline{x}-1)}{(1-\theta)^2} \\
I(\theta) &= \frac{n}{\theta^2} + \frac{n}{\theta(1-\theta)} = n\frac{1-\theta+\theta}{\theta^2(1-\theta)} = \frac{n}{\theta^2(1-\theta)}
\end{aligned}
$$

$$
S(\widetilde{\theta}) = 0 \rightarrow n - n\widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}n\overline{x} - n\theta \rightarrow \widetilde{\theta} = \frac{1}{\overline{x}}
$$

   Como $H(\widetilde{\theta}) < 0$, então $\widehat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}$ é o EMV de θ.

   (d) Supondo as condições de regularidade satisfeitas, temos que $\sqrt{n}\left(\widehat{\theta} - \theta\right) \rightarrow N\left(0, \theta^2(1-\theta)\right)$

   (e) Pelo resultado do item anterior, temos que $IC_A(\theta;\gamma) = \left[\widehat{\theta} - z_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{\theta}^2(1-\widehat{\theta})}{n}}; \widehat{\theta} + z_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{\theta}^2(1-\widehat{\theta})}{n}}\right]$, em que $P(Z \leq z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$.

2. Questão 2) Defina ($y_i = |x_i|$,$y_1 = min\{|x_1|, ..., |x_n|\}$,$y_n = max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$):

   (a) Temos que

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) = \frac{1}{(2\theta)^n}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(|x_i|) = \frac{1}{(2\theta)^n}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(y_n)\mathbb{1}_{(0,y_n)}(y_1)$$

   Por outro lado, temos que:

$$\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta)}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}^*;\theta)} = \frac{\mathbb{1}_{(0,\theta)}(y_n)\mathbb{1}_{(0,y_n)}(y_1)}{\mathbb{1}_{(0,\theta)}(y_n^*)\mathbb{1}_{(0,y_n^*)}(y_1^*)} = Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^*) \leftrightarrow y_n = y_n^* \tag{1}$$

   assim, Y_n é uma estatística suficiente e minimal. Além disso, temos que $f_{Y_n}(y;\theta) = \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(y)$. Assim, vem que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(g(Y_n)) &= 0 \to \int_0^\theta g(y)\frac{ny^{n-1}}{\theta^n}d_y = 0 \\
&= \int_0^\theta g(y)y^{n-1}d_y = 0 \to g(\theta)\theta^{n-1} = 0 \\
&\to g(\theta) = 0, \forall\theta \in \Theta \qquad (2)
\end{aligned}$$

   Portanto, como $\mathcal{X} \subset \Theta$, então $g(y) = 0, \forall y \in \mathcal{X}$. Logo, Y_n também é uma estatística completa.

   (b) Temos que $\mathcal{E}(X) = 0$, portanto, não nos serve para calcular o EMM de θ. Por outro lado, temos que $\mathcal{E}(X^2) = \frac{\theta^2}{12}$ e, logo:

$$\frac{\widehat{\theta}^2}{12} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \to \widehat{\theta} = \pm 2\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2} \tag{3}$$

   Logo, como $\theta \in (0,\infty)$ então $\widehat{\theta}$=$2\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$ é o EMM de θ.

(c) Temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\widehat{\theta}^*) &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}(|X_i|) = \frac{2}{n}\frac{\theta n}{2} = \theta \\
\mathcal{V}(\widehat{\theta}^*) &= \frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n} \\
\mathcal{B}(\widehat{\theta}^*) &= 0; \mathcal{EQM}(\widehat{\theta}^*) = \mathcal{V}(\widehat{\theta}^*) + \mathcal{B}^2(\widehat{\theta}^*) = \frac{\theta^2}{3n}
\end{aligned}$$

(d) Do item a), temos que:

$$L(\theta) \propto \frac{1}{(2\theta)^n}\mathbb{1}_{(y_n,\infty)}(\theta)$$

Que é uma função descrente (em θ), pois $L'(\theta) = \frac{-n}{2\theta^{n-1}}$. Assim, $\widehat{\theta} = Y_n$ é o EMV de θ. Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(Y_n^k) &= \frac{n}{\theta^n}\int_0^{\infty} y^{n+k-1}dy = \frac{n\theta^{n+k}}{(n+k)\theta^n}, \forall n+k > 1 \\
&= \frac{n\theta^k}{(n+k)}
\end{aligned}$$

Portanto, $EM(Y_n) = \frac{n\theta}{n+1}$, $\mathcal{B}(Y_n) = \frac{-\theta}{n+1}$ e $\mathcal{E}(Y_n) = \frac{n\theta^2}{(n+2)}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(Y_n) &= \frac{n\theta^2}{(n+2)} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}\left(n(n^2+2n+1) - n^3 - 2n^2\right) \\
&= \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{EQM}(Y_n) &= \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} + \frac{\theta^2}{(n+1)^2} \\
&= \frac{\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}(n+n+2) = \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)}
\end{aligned}$$

(e) Como pelo menos um dos estimadores é viciado, comparemos seus EQM's, assim:

$$\frac{\mathcal{EQM}(\widehat{\theta}^*)}{\mathcal{EQM}(Y_n)} = \frac{n^2 + 5n + 2}{6n} = g(n) > 1$$

Como $g(n)$ é uma razão de polinômios em que grau daquele do que numerador, $g(n) > 1, \forall n$.

(f) Pelo item a) temos que Y_n é uma estatística suficiente completa e minimal. Por outro lado, pelo item d), temos que $\mathcal{E}(Y_n) = \frac{n}{n+1}\theta$. Logo, pelo Teorema de LS, temos que $Y_n = \frac{n+1}{n}Y_n$ é o ENVVUM de θ.

3. Questão 3)

(a) Temos que:

$$
\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) &= \left[\prod_{i=1}^{m}\binom{m}{x_i}\right]\theta^{n\overline{x}}(1-\theta)^{n(1-\overline{x})}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\{0,1,2...,m\}}(x_i) \\
&= \exp\left\{n\overline{x}\ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)+n\ln(1-\theta)\right\}h(\boldsymbol{x})\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}) \\
&= \exp\left\{t(\boldsymbol{x})x(\theta)+d(\theta)\right\}h(\boldsymbol{x})\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x}) \\
&= \exp\left\{t(\boldsymbol{x})\eta+d_{)}(\eta)\right\}h(\boldsymbol{x})\mathbb{1}_A(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

em que $t(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i$, $c(\theta)=\ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$, $h(\boldsymbol{x})=\prod_{i=1}^{m}\binom{m}{x_i}\theta^{n\overline{x}}$, $A=\{0,1,2,..,m\}^n$, $\eta=\ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)$, $\theta=\frac{1}{1+e^{-\eta}}$, $d(\theta)=n\ln(1-\theta)$, $d_0(\eta)=-n\ln\left(1-e^{\eta}\right)$. Assim, como $\Theta_\eta=I\!R$ contem algum segmento de reta, então $T(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{n}X_i$ é uma estatística suficiente, completa e minimal.

(b) Defina $T=T(\boldsymbol{X})=\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}X_i$. Temos que $\mathcal{E}(T)=\theta$. Logo, pelo item a) e pelo TLS, temos que T é o ENVUUM para θ. Além disso, temos que

$$
\begin{aligned}
l(\theta) &= c+n\overline{x}\ln\theta+n(1-\overline{x})\ln(1-\theta) \\
S(\theta) &= \frac{n\overline{x}}{\theta}-\frac{n(1-\overline{x})}{1-\theta};H(\theta)=-\frac{n\overline{x}}{\theta^2}-\frac{n(1-\overline{x})}{(1-\theta)^2} \\
I(\theta) &= \frac{n}{\theta}+\frac{n}{(1-\theta)}=\frac{n}{\theta(1-\theta)}
\end{aligned}
$$

Assim, $LICR(\theta)=\frac{\theta(1-\theta)}{n}$. Além disso, $VM(T)=\frac{1}{n^2m^2}nm\theta(1-\theta)=\frac{\theta(1-\theta)}{n}=LICR(\theta)$.

c) Sob as condições de regularidade, temos que $\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}-\theta\right)\to N(0,\theta(1-\theta))$. Logo, $IC_A(\theta,\gamma)=\left[\widehat{\theta}-z_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\widehat{\theta}(1-\widehat{\theta})}{n}};\widehat{\theta}+z_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}\right]$

d) Seja $T^*(\boldsymbol{X})=\mathbb{1}_{\{X_1=0\cup X_1=1\}}$. Então, $\mathcal{E}(T^*)=P(X_1=0\cup X_1=1)=(1-\theta)^m+m\theta(1-\theta)^{m-1}=(1-\theta)^{m-1}(m+1-\theta)$. Por outro lado, temos que $S=\sum_{i=1}^{n}X_i$ é uma estatística suficiente e completa (item a)). Dessa, forma, temos que $T=\mathcal{E}(T^*|S)$ é o ENVVUM de θ. Além disso:

$$
\begin{aligned}
T = P(X_1 = 0 \cup X_1 = 1|S) &= \frac{1}{P(S=s)}\left[P(X_1 = 0, S = s) + P(X_1 = 1, S = s)\right] \\
&= \frac{1}{P(S=s)}\left[P(X_1 = 0)P\left(\sum_{i=2}^{n} X_i = s\right)\right. \\
&+ \left. P(X_1 = 1)P\left(\sum_{i=2}^{n} X_i = s - 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{\binom{mn}{s}\theta^s(1-\theta)^{mn-s}}\bigg((1-\theta)^m\binom{m(n-1)}{s}\theta^s(1-\theta)^{m(n-1)-s} \\
&+ m\theta(1-\theta)^{m-1}\binom{m(n-1)}{s-1}\theta^{s-1}(1-\theta)^{m(n-1)-s+1}\bigg) \\
&= \frac{1}{\binom{mn}{s}}\left(\binom{m(n-1)}{s} + m\binom{m(n-1)}{s-1}\right)
\end{aligned}
$$

4. Questão 4

(a) Temos que

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) &= \sigma^{-n}\exp\left\{-\frac{n\overline{x}}{\sigma}+n\frac{\mu}{\sigma}\right\}\mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(y_1)\mathbb{1}_{(y_1,\infty)}(y_n) \\ &= g(\boldsymbol{t};\boldsymbol{\theta})h(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

em que $\boldsymbol{t}=(\sum_{i=1}^{n}x_i,y_1)'$, $g(\boldsymbol{t};\boldsymbol{\theta})=\sigma^{-n}\exp\left\{-\frac{n\overline{x}}{\sigma}+n\frac{\mu}{\sigma}\right\}\mathbb{1}_{(\mu,\infty)}(y_1)$, $h(\boldsymbol{x})=\mathbb{1}_{(y_1,\infty)}(y_n)$
Assim, pelo CF temos que $\boldsymbol{T}=(\sum_{i-1}^{n}X_i,Y_1)'$

(b) Temos que $\mathcal{E}(X)=\sigma+\mu$, $\mathcal{V}(X)=\sigma^2$, $\mathcal{E}(X^2)=\sigma^2+(\sigma+\mu)^2$. Assim

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}+\widehat{\mu} &= \overline{X} \\ \widehat{\sigma}^2+(\widehat{\sigma}+\widetilde{\mu})^2 &= \overline{X}_2 \to \widehat{\sigma}=\sqrt{\overline{X}_2-\overline{X}^2} \end{aligned}$$

Logo, $\widehat{\mu}=\overline{X}-\sqrt{\overline{X}_2-\overline{X}^2}$ e $\widehat{\sigma}=\sqrt{\overline{X}_2-\overline{X}^2}$, são os EMM's de $\boldsymbol{\theta}$.

(c) Temos que:

$$L(\mu)\propto\exp\left\{\frac{n\mu}{\sigma}\right\}\mathbb{1}_{(0,y_1]}(\mu)$$

Como a função acima é crescente em μ $\left(\exp\left\{\frac{n\mu}{\sigma}\right\}\frac{n}{\sigma}\right)$, temos que $\widehat{\mu}=Y_1$. Além disso, temos que:

$$Y_1=Y_1^*+\mu$$

em que $Y_1^*=\min\{Y_1,...,Y_n\}$

$$f_{Y_1^*}(y;\sigma)=\frac{n}{\sigma}\exp\left\{-\frac{ny}{\sigma}\right\}\sim\exp(\sigma/n)$$

Logo, $\mathcal{E}(Y_1)=\dfrac{\sigma}{n}+\mu$, $\mathcal{V}(Y_1)=\dfrac{\sigma^2}{n^2}$.

(d) Temos que

$$\begin{aligned} l(\mu) &= -n\ln\sigma - \frac{n}{\sigma}\left(\overline{x}-\mu\right); S(\mu) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{n}{\sigma^2}\left(\overline{x}-\mu\right) \\ H(\mu) &= \frac{n}{\sigma^2} - \frac{2n}{\sigma^3}\left(\overline{x}-\mu\right); I(\mu) = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{2n}{\sigma^3}\left(\overline{x}-\mu\right) = -\frac{n}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Temos que $S(\widetilde{\mu}) = 0 \to \widetilde{\sigma} = \overline{x} - \mu$. Como $H(\widetilde{\mu}) < 0$, $\widehat{\mu} = \overline{X} - \mu$. Por outro lado, temos que

$$\mathcal{E}(\widehat{\mu}) = \sigma; \mathcal{V}(\widehat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

(e) Temos que:

$$S_X(x;\sigma) = \exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\}$$

Logo, $Q = \dfrac{2n(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \sim \chi^2_{2n}$, logo

$$P\left(q_1 \leq Q \leq q_2\right) = \gamma \leftrightarrow P\left(\frac{2n\left(\overline{X}-\mu\right)}{q_2} \leq \sigma \leq \frac{2n\left(\overline{X}-\mu\right)}{q_1}\right) = \gamma$$

Assim, $IC(\sigma;\gamma) = \left[\frac{2n\left(\overline{X}-\mu\right)}{q_2}; \frac{2n\left(\overline{X}-\mu\right)}{q_1}\right]$