ME 705A - Inferência Bayesiana
Segundo semestre de 2013
Prova I
Data: 09/09/2013

Nome: ________________________________________ RA: ____________________

**Leia atentamente as instruções abaixo:**

- **Coloque seu nome completo e RA em todas as folhas que você recebeu, inclusive nesta.**
- **Utilize somente um dos lados de cada folha.**
- **Leia atentamente cada uma das questões.**
- **Enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar.**
- **Justifique, adequadamente, seus desenvolvimentos, sem, no entanto, escrever excessivamente.**
- **O(a) aluno(a) só poderá sair da sala após as 10h30, mesmo que já tenha finalizado a prova. Após a saída do(a) primeiro(a) aluno(a) não será permitido a entrada de nenhum(a) outro(a) aluno(a).**
- **Não é permitdo empréstimo de material.**
- **Não serão dirimidas dúvidas de quaisquer natureza, após os 20 minutos iniciais.**
- **Resolva a prova, preferencialmente, à caneta, e procure ser organizado(a). Se fizer à lápis, destaque, à caneta, sua resposta.**
- **O(a) aluno(a) deverá portar sua carteira de estudante e apresentá-la, quando for solicitada sua assinatura.**
- **Utilize somente um lado de cada folha de resolução.**
- **Contestações a respeito da nota, só serão consideradas se estiverem por escrito.**
- **A nota do aluno(a) será $\frac{NP}{NT} \times 10$, em que NP é o número de pontos obtidos na prova e NT é o numero total de pontos da prova.**
- **Os resultados numéricos finais devem ser apresentados com duas casas decimais, apenas.**
- **A prova terá duração de 120 minutos, das 10h às 12h, improrrogáveis.**

Faça uma excelente Prova!!

1. Seja uma amostra aleatória, de tamanho $n$, de $X|\theta \sim \text{Bernoulli}(\theta), \theta \in (0,1)$. Responda os itens:

    a) Prove que a família conjugada natural de prioris para o modelo em questão corresponde à distribuição beta$(a, b)$. (50 pontos)
    b) Obtenha a priori de Jeffreys para $\theta$ e prove que ela é própria. (100 pontos)
    c) Obtenha a distribuição a posteriori de $\theta$ utilizando a priori encontrada no item a) (família conjugada natural). (50 pontos)
    d) Obtenha o estimador EAP de $\theta$, ou seja $\widehat{\theta}_{EAP}$, bem como o desvio-padrão à posteriori, ou seja o $DPAP(\theta)$, utilizando a posteriori obtida no item c). O que ocorre com o $DPAP(\theta)$ quando $n \to \infty$? (100 pontos)
    e) Para $a = 0$ (admita que seja possível considerar esse valor) e $b = 1$ (em relação à priori do item a)) obtenha a variância e o erro quadrático médio frequentistas do estimador EAP. Compare seu EQM com o EQM do estimador de máxima verossimilhança neste caso e considerando $\theta = 1/2$. Qual deles você utilizaria? Justifique, adequadamente, sua resposta. Você pode utilizar o fato de que $EQM_F(\widehat{\theta}_{MV}) = \dfrac{\theta(1-\theta)}{n}$, em que $\widehat{\theta}_{MV}$ é o emv de $\theta$. (200 pontos)

2. Considere uma única observação da distribuição Binomial-Poisson:

$$p(x, y|\gamma, \phi) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \gamma^x (1-\gamma)^{y-x} \frac{e^{-\phi}\phi^y}{y!} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(y) \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,y\}}(x), \gamma \in (0,1), \phi \in \mathcal{R}^+$$

    Responda os itens:

    a) Prove que a verossimilhança é separável. (50 pontos)
    b) Determine a família conjugada natural de prioris para o modelo. (100 pontos)
    c) Determine as distribuições: $X|(Y = y, \boldsymbol{\theta})$ e $Y|\boldsymbol{\theta}$, em que $\boldsymbol{\theta} = (\gamma, \phi)$. Além disso, obtenha a priori de Jeffreys verificando se ela é própria. (200 pontos)
    d) Obtenha as posterioris conjunta e marginais, sob a priori de Jeffreys. Neste caso, as três posterioris são próprias? Justifique, adequadamente, sua resposta. (150 pontos)

3. Seja uma amostra aleatória, de tamanho $n$, de $X|(a,\theta) \sim$ Galenshore$(a,\theta), (a,\theta) \in (0,\infty)^2$, com a seguinte densidade:

$$p(x|a,\theta) = \frac{2}{\Gamma(a)}\theta^{2a}x^{2a-1}e^{-x^2\theta^2}I_{(0,\infty)}(x)$$

Responda os itens considerando $a = 1/2$ (lembre que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$):

a) Determine a família conjugada natural de prioris para o modelo em questão. (150 pontos)

b) Obtenha a priori de Jeffreys para $\theta$ e verifique se ela é própria. Sugestão: veja o formulário. (150 pontos)

c) Obtenha a distribuição a posteriori de $\theta$ com base na priori encontrada no item a) (família conjugada natural). (100 pontos)

d) Obtenha a distribuição a posteriori de $\theta$ com base na priori encontrada no item b) (priori de Jeffreys). (100 pontos)

Formulário

1. Se $X|(m,\theta) \sim$ Binomial$(m,\theta), m \in \{1,2,3,...\}, \theta \in (0,1)$, então $p(x|m,\theta) = \begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix} \theta^x(1-\theta)^{m-x}\mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,m\}}(X)$, $\mathcal{E}(X|m,\theta) = m\theta, \mathcal{V}(X|m,\theta) = m\theta(1-\theta)$. Se $m = 1$, obtem-se a distribuição de Bernoulli$(\theta)$.

2. Se $X|\lambda \sim$ Poisson$(\lambda), \lambda > 0$, $p(x|\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(x)$, $\mathcal{E}(X|\lambda) = \lambda$, $\mathcal{V}(X|\lambda) = \lambda$.

3. Se $X|(r,\theta) \sim$ gama$(r,\theta), r > 0, \theta > 0$, então $p(x|r,\theta) = \dfrac{1}{\theta^r\Gamma(r)}e^{-\frac{x}{\theta}}x^{r-1}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ e $\mathcal{E}(X^k|r,\theta) = \dfrac{\theta^k\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)}$.

4. Se $X|(a,b) \sim$ beta$(a,b), a > 0, b > 0$, então $p(x|a,b) = \dfrac{1}{\beta(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, $\beta(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, $\mathcal{E}(X|a,b) = \dfrac{a}{a+b}, \mathcal{V}(X|a,b) = \dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

5. $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx$, $\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$.

6. Se $X|(a,\theta) \sim$ gama$(a,\theta^{-1})$ então $Y = \sqrt{\dfrac{X}{\theta}} \sim$ Galenshore$(a,\theta)$