1. Questão 1

(a) Temos que:

$$\begin{aligned}
f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) &= \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\theta^{-2n}\exp\left\{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}\mathbb{1}_{(0,\infty)^n}(\boldsymbol{x}) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^2\right)\exp\left\{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - 2n\ln\theta\right\}\mathbb{1}_{(0,\infty)^n}(\boldsymbol{x}) \\
&= \exp\left\{c(\theta)t(\boldsymbol{x}) + d(\theta)\right\}h(\boldsymbol{x}) \qquad (1)\\
&= exp\left\{\eta t(\boldsymbol{x}) + d_0(\eta)\right\}h(\boldsymbol{x}) \qquad (2)
\end{aligned}$$

em que $c(\theta) = \eta = -\dfrac{1}{2\theta^2}$, $d(\theta) = -2n\ln\theta$, $h(\boldsymbol{x}) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\mathbb{1}_{(0,\infty)^n}(\boldsymbol{x})$, $\theta = \sqrt{-\dfrac{1}{2\eta}}$, $d_0(\eta) = n\left(\ln 2 + \ln(-\eta)\right)$. Por (1) temos que $T = T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ é suficiente e, por (2), somado ao fato de que $\Theta_\eta = (-\infty, 0)$ contem algum segmento de reta, então T também é completa e minimal. Temos também que $\mathcal{E}\left(\frac{T}{2n}\right) = \theta^2$. Assim, pelo TLS $\frac{T}{2n}$ é o ENVUM para θ^2.

(b) Por (1) e como $c()$ é uma função não decrescente em θ, então $\boldsymbol{X}$ tem RVMND em T. Logo um TUMP é dado por:

$$\phi(t^*) = \begin{cases} 1, \text{se } t^* > c \\ 0, \text{cc} \end{cases} \qquad (3)$$

em que $t^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\theta_0^2}$ e $P_{\theta_0}(T^* > c) = \alpha$, em que $T^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\theta_0^2}$ e $T^* \sim \chi^2_{2n}$, sob H_0.

(c) Usando a RA do teste desenvolvido no item b), temos que um ICUMA pode ser obtido através de:

$$
\begin{aligned}
P_{\theta_0}(T^* < c) &= 1-\alpha = \gamma \leftrightarrow P_{\theta_0}\left(\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 < \theta_0^2\right) = \gamma \\
&\leftrightarrow \quad P_{\theta_0}\left(\sqrt{\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} < \theta_0\right) = \gamma \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Assim, $IC(\theta, \gamma) = \left[\sqrt{\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}, \infty\right]$

(d) Temos que:

$$
\begin{aligned}
l(\theta) &= const. - 2n\ln\theta - \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2; S(\theta) = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
S(\widehat{\theta}) &= 0 \to \frac{2n}{\theta} = \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \to \widehat{\theta} = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \\
H(\theta) &= \frac{2n}{\theta^2} - \frac{3}{\theta^4}\sum_{i=1}^{n} x_i^2; I(\theta) = \frac{4n}{\theta^2}
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
Q_W = \frac{4n}{\widehat{\theta^2}}\left(\widehat{\theta} - \theta_0\right)^2 = 4n\left(1 - 2\frac{\theta_0}{\widehat{\theta}} + \frac{\theta_0^2}{\widehat{\theta^2}}\right)
$$

2. Questão 2

   (a) Temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(X^k) &= \frac{2}{\theta^2}\frac{x^{k+2}}{k+2}\Big|_0^\theta = \frac{2\theta^k}{k+2}; \mathcal{E}(X) = \frac{2\theta}{3}; \mathcal{E}(X^2) = \frac{\theta^2}{2} \\
\mathcal{V}(X) &= \theta^2\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{9}\right) = \frac{\theta^2}{18}(9-8) = \frac{\theta^2}{18}
\end{aligned}$$

   Assim,

$$\mathcal{E}(X) = \overline{X} \to \widehat{\theta} = \frac{3}{2}\overline{X}$$

   também,

$$\mathcal{E}(\widehat{\theta}) = \theta; \mathcal{V}(\widehat{\theta}) = \frac{\theta^2}{8n}, \mathcal{B}(\widehat{\theta}) = 0; \mathcal{EQM}(\widehat{\theta}) = \frac{\theta^2}{8n}$$

   (b) Temos que:

$$L(\theta) \propto \theta^{-2n}\mathbb{1}_{(0,y_n)}(y_1)\mathbb{1}_{(0,\theta)}(y_n) \propto \theta^{-2n}\mathbb{1}_{(y_n,\infty)}(\theta)$$

   Logo Y_n é o emv de θ. Além disso, temos que: $f_{Y_n}(y;\theta) = n\frac{2y}{\theta^2}\left(\frac{y^2}{\theta^2}\right)^{n-1} = 2n\frac{y^{2n-1}}{\theta^{2n}}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(Y_n^k) &= \frac{2n}{\theta^{2n}}\frac{y^{2n+k}}{2n+k}\Big|_0^\theta = \frac{2n}{2n+k}\theta^k \\
\mathcal{E}(Y_n) &= \frac{2n}{2n+1}\theta; \mathcal{E}(Y_n^2) = \frac{n}{n+1}\theta^2; \\
\mathcal{V}(Y_n) &= \frac{n\theta^2}{(2n+1)^2(n+1)}\left(4n^2+4n+1-4n^2-4n\right) = \frac{n\theta^2}{(2n+1)^2(n+1)}
\end{aligned}$$

   Logo,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(Y_n) &= \frac{2n\theta}{2n+1}; \mathcal{V}(Y_n) = \frac{n\theta^2}{(2n+1)^2(n+1)}; \mathcal{B}(Y_n) = -\frac{\theta}{2n+1}; \\
\mathcal{EQM}(Y_n) &= \frac{n\theta^2}{(2n+1)^2(n+1)} + \frac{\theta^2}{(2n+1)^2} \\
&= \frac{\theta^2}{(2n+1)^2(n+1)}(n+n+1) = \frac{\theta^2}{(2n+1)(n+1)}
\end{aligned}
$$

(c) Como Y_n é um estimador viciado, vamos comparar os EQM's de ambos, assim, vem que:

$$
\frac{\mathcal{EQM}(Y_n)}{\mathcal{EQM}(\widehat{\theta}_{MM})} = \frac{9n}{(2n+1)(n+1)} < 1, \forall n
$$

$$
2n^2 + 3n + 1 - 9n > 0 \leftrightarrow 2n^2 - 6n + 1 > 0
$$

$$
\Delta = 36 - 8 = 28; n = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{4}; n_1 < 1; n_2 > 2,5
$$

Logo, Y_n é melhor do que $\widehat{\theta}_{MM}$, se $n < 1; n > 2,5$

(d) Temos que:

$$
\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta)}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y};\theta)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{(0,y_n)}(y_1)\mathbb{1}_{(0,\theta)}(y_n)}{\prod_{i=1}^{n} x_i^* \mathbb{1}_{(0,y_n^*)}(y_1^*)\mathbb{1}_{(0,\theta)}(y_n^*)}
$$

não depende de θ, se e somente se $y_n = y_n^*$. Logo Y_n é uma estatística suficiente e minimal. Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(g(Y_n)) &= \int_0^\theta 2n\frac{y^{2n-1}}{\theta^{2n}} g(y)dy = 0 \to \int_0^\theta y^{2n-1}g(y)dy = 0 \\
&\to g(\theta) = 0, \forall \theta \in (0,\infty) \to g(y_n) = 0, \forall y_n \in (0,\theta)
\end{aligned}
$$

Logo, Y_n é também completa. Logo pelo TLS, temos que $Y_n^* = \dfrac{2n+1}{2n} Y_n$ é o ENVUM de θ. Logo,

$$\mathcal{V}\left(Y_n^*\right) = \frac{(2n+1)^2}{4n^2} \frac{n\theta^2}{(2n+1)^2(n+1)} = \frac{\theta^2}{4n(n+1)}; \mathcal{B}\left(Y_n^*\right) = 0; \mathcal{EQM}\left(Y_n^*\right) = \mathcal{V}\left(Y_n^*\right)$$

3. Questão 3

   (a) Temos que

$$\begin{aligned} l(\theta) &= -n\theta + n\overline{x}\ln\theta - n\ln(1-e^{-\theta}) + const \\ S(\theta) &= -n + \frac{n\overline{x}}{\theta} - n\frac{e^{-\theta}}{(1-e^{-\theta})}; H(\theta) = -\frac{n\overline{x}}{\theta^2} - n\frac{-e^{-\theta}+e^{-2\theta}-e^{-2\theta}}{(1-e^{-\theta})^2} \\ &= -\frac{n\overline{x}}{\theta^2} + n\frac{e^{-\theta}}{(1-e^{-\theta})^2}; I(\theta) = \frac{n}{\theta(1-e^{-\theta})} - n\frac{e^{-\theta}}{(1-e^{-\theta})^2} \\ &= \frac{n}{\theta(1-e^{-\theta})^2}\left(1-e^{-\theta}-\theta e^{-\theta}\right) \end{aligned}$$

   Logo, sob as condições de regularidade, temos que $\widehat{\theta} \approx N(\theta, I^{-1}(\theta))$, $I^{-1}(\theta) = \dfrac{\theta(1-e^{-\theta})^2}{n(1-e^{-\theta}-\theta e^{-\theta})}$

   (b) Temos que $\tau'(\theta) = \dfrac{1-e^{-\theta}-\theta e^{-\theta}}{(1-e^{-\theta})^2}$ Assim

$$\begin{aligned} LICR(\tau(\theta)) &= \frac{(1-e^{-\theta}-\theta e^{-\theta})^2}{(1-e^{-\theta})^4}\frac{\theta(1-e^{-\theta})^2}{n(1-e^{-\theta}-\theta e^{-\theta})} \\ &= \frac{\theta(1-e^{-\theta}-\theta e^{-\theta})}{n(1-e^{-\theta})^2} \end{aligned}$$

   IC, método delta. Para n suficientemente grande, temos que $\tau(\widehat{\theta}) \approx N(\tau(\theta), \sigma^2(\theta))$, em que $\sigma^2(\theta) = (\tau'(\theta))^2 I^{-1}(\theta) = LICR(\tau(\theta))$. Assim,

$$IC_A(\tau(\theta),\gamma) = \left[\tau(\widehat{\theta}) - z_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{LICR(\widehat{\theta})}; \tau(\widehat{\theta}) + z_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{LICR(\widehat{\theta})}\right]$$

   em que $P(Z < z_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \frac{1+\gamma}{2}$, $Z \approx N(0,1)$.

   (c) Temos que:

$$\pi(\theta|\boldsymbol{x}) \propto \theta^{a+1-1}(1-\theta)^{n(\overline{x}-1)+b-1}$$

   ou seja, $\theta|\boldsymbol{x} \sim \text{beta}(a+1, n(\overline{x}-1)+b)$

Por outro lado, note que

$$g(d) = \mathcal{E}_{\theta|\boldsymbol{X}}(L(d;\theta)) = \mathcal{E}_{\theta|\boldsymbol{X}}(\theta^{-1})d - 1 - \ln(d) + \mathcal{E}_{\theta|\boldsymbol{X}}(\ln(\theta))$$

Assim,

$$g'(d) = \mathcal{E}_{\theta|\boldsymbol{X}}(\theta^{-1}) - \frac{1}{d} = 0 \rightarrow d = \left(\mathcal{E}(\theta^{-1}|\boldsymbol{X})\right)^{-1}$$

Por outro lado, temos que se $Y \sim \text{beta}(a, b)$, então:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(Y^{-1}) &= \frac{1}{\beta(a,b)}\int_0^1 x^{a-1-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\beta(a-1,b)}{\beta(a,b)} = \frac{\Gamma(a-1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b-1)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\
&= \frac{(a+b-1)}{a-1}
\end{aligned}$$

Assim, $\widetilde{\theta}_B = \dfrac{a+1+n(\overline{x}-1)+b}{a}$

4. Questão 4

   (a) Temos que:

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta) = \frac{1}{(2\theta)^n}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(|x_i|) = \frac{1}{(2\theta)^n}\mathbb{1}_{(0,y_n)}(y_1)\mathbb{1}_{(0,\theta)}(y_n)$$

   Assim, temos que ($\theta_2 < \theta_1$):

$$\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_2)}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\theta_1)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^n \frac{\mathbb{1}_{(0,\theta_2)}(y_n)}{\mathbb{1}_{(0,\theta_1)}(y_n)} = \begin{cases} 0, \text{se } \theta_1 \leq y_n \leq \theta_2 \\ \infty, \text{se } y_n \geq \theta_2 \end{cases}$$

   Assim, $\boldsymbol{X}$ tem RVMND em Y_n. Portanto um TUMP é dado por:

$$\phi(y_n) = \begin{cases} 1, \text{se } \ y_n < c \\ 0, \ \text{cc} \end{cases}$$

   Por outro lado, note que, $F_{Y_n}(y;\theta = n\frac{y^{n-1}}{\theta^n}\mathbb{1}_{(0,\theta)}(y)$ e $F_{W_n}(w) = nw^{n-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(w)$, em que $W_n = \frac{Y_n}{\theta}$. Assim, o TUMP acima pode ser reescrito como

$$\phi(w) = \begin{cases} 1, \text{se } \ w < c^* \\ 0, \ \text{cc} \end{cases}$$

   em que $w = \frac{y_n}{\theta_0}$, $P_{\theta_0}(W < c^*) = \alpha$, $W = \frac{Y_n}{\theta_0}$. Logo, $c^* = \alpha^{1/(n)}$.

   (b) Temos que (se $W = \frac{Y_n}{\theta}$):

$$P(q_1 < W < q_2) = \gamma \leftrightarrow P\left(\frac{Y_n}{q_2} < \theta < \frac{Y_n}{q_1}\right) = \gamma$$

   em que $IC(\theta;\gamma) = \left[\frac{Y_n}{q_2};\frac{Y_n}{q_1}\right]$, $q_1 = \left(\frac{1-\gamma}{2}\right)^{1/(n-1)}$, $q_2 = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^{1/(n-1)}$

(c) Temos que:

$$L(\theta) \propto \theta^{-n} \mathbb{1}_{(y_n,\infty)}(\theta)$$

que corresponde ao núcleo de uma Pareto$(n-1, y_n)$. Assim, a família conjugada é dada por $\theta \sim \text{Pareto}(\alpha, \beta)$. Logo

$$\pi(\theta|\boldsymbol{x}) = \frac{\alpha + n}{\theta^{n+\alpha+1}} \left(\beta^*\right)^{n+a} \mathbb{1}_{(\beta^*,\infty)}(\theta)$$

em que $\beta^* = \min(\beta, y_n)$ e $\theta|\boldsymbol{x} \sim \text{Pareto}(n+\alpha, \beta^*)$

(d) Temos que:

$$\widetilde{\theta}_B = \frac{(\alpha + n)\beta^*}{\alpha + n - 1}$$