ME 705A - Inferência Bayesiana
Segundo semestre de 2013
Prova II
Data: 16/10/2013

Nome: ____ RA: ____________________

Leia atentamente as instruções abaixo:

- **Coloque seu nome completo e RA em todas as folhas que você recebeu, inclusive nesta.**
- **Utilize somente um dos lados de cada folha.**
- **Leia atentamente cada uma das questões.**
- **Enuncie, claramente, todos os resultados que você utilizar.**
- **Justifique, adequadamente, seus desenvolvimentos, sem, no entanto, escrever excessivamente.**
- **O(a) aluno(a) só poderá sair da sala após as 10h30, mesmo que já tenha finalizado a prova. Após a saída do(a) primeiro(a) aluno(a) não será permitido a entrada de nenhum(a) outro(a) aluno(a).**
- **Não é permitdo empréstimo de material.**
- **Não serão dirimidas dúvidas de quaisquer natureza, após os 20 minutos iniciais.**
- **Resolva a prova, preferencialmente, à caneta, e procure ser organizado(a). Se fizer à lápis, destaque, à caneta, sua resposta.**
- **O(a) aluno(a) deverá portar sua carteira de estudante e apresentá-la, quando for solicitada sua assinatura.**
- **Utilize somente um lado de cada folha de resolução.**
- **Contestações a respeito da nota, só serão consideradas se estiverem por escrito.**
- **A nota do aluno(a) será $\frac{NP}{NT} \times 10$, em que NP é o número de pontos obtidos na prova e NT é o numero total de pontos da prova.**
- **Os resultados numéricos finais devem ser apresentados com duas casas decimais, apenas.**
- **A prova terá duração de 120 minutos, das 10h às 12h, improrrogáveis.**

Faça uma excelente Prova!!

1. Seja uma amostra aleatória de tamanho n de $X|\theta \sim U_{[0,\theta]}, \theta > 0$ e considere $\theta \sim$ Pareto(a, b) (b menor que $y_n =$ máximo$\{x_1, ..., x_n\}$). Responda os itens abaixo:

   a) Encontre a distribuição a posteriori de θ com base na priori proposta e obtenha $\widehat{\theta}_{EAP} = \mathcal{E}(\theta|\boldsymbol{X})$. Sugestão: use o fato de que $\prod_{i=1}^{n} I_{[0,\theta]}(x_i) = \mathbb{1}_{[y_n,\infty)}(\theta)\mathbb{1}_{[0,y_n]}(y_1)$, em que $y_1 =$ mínimo$\{x_1, ..., x_n\}$. (100 pontos)

   b) Compare o $\widehat{\theta}_{EAP}$ (considerando $a = 1$) com o emv de θ, ou seja, com $\widehat{\theta}_{MV} = Y_n$, em termos dos seus EQM's frequentistas, em função de n (tamanho da amostra). Qual dos dois estimadores você escolheria? Justifique, adequadamente, suas conclusões. Sugestão: use o fato de que $\mathcal{E}(Y_n^k|\theta) = \dfrac{n}{n+k}\theta^k, \forall k > 0$. (150 pontos)

   c) Obtenha a $F(.|\boldsymbol{x})$ (função de distribuição acumulada) relativa à posteriori obtida no item a). Depois, construa um intervalo de credibilidade γ (simétrico), para θ. Considerando $n = 9, y_n = 16, \gamma = 0,95$ e $a = 1$, particularize tal intervalo. (150 pontos)

   d) Encontre $O(H_1, H_0|\boldsymbol{x})$ para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, $\theta_0 > 0$ conhecido. Utilizando $\theta_0 = 20$ e as informações do item c), qual sua conclusão sobre as hipóteses em questão, com base na $O(H_1, H_0|\boldsymbol{x})$ calculada (veja a Tabela no formulário)? Ela está em concordância com a conclusão obtida através do IC_B simétrico encontrado no item c)? Justifique, adequadamente, suas respostas. (100 pontos)

2. Seja uma amostra aleatória de tamanho n de $X|\theta \sim$ Rayleigh$(\theta), \theta > 0$, com a seguinte densidade:

$$p(x|\theta) = \theta^2 x e^{-\frac{1}{2}x^2\theta^2} I_{(0,\infty)}(x)$$

   Responda os itens abaixo:

   a) Prove que a família conjugada natural de prioris para o modelo em questão corresponde à distribuição Galenshore(a, b). Sugestão: veja o formulário. (50 pontos)

   b) Obtenha a priori de Jeffreys para θ e verifique se ela é própria. Sugestão: veja o formulário. (100 pontos)

   c) Obtenha a posteriori com base na priori obtida no item a) (família conjugada). (100 pontos)

   d) Considere a posteriori obtida no item c). Obtenha um intervalo de credibilidade γ (simétrico) para θ em função de uma transformação para este parâmetro que apresente distribuição $\chi^2_{(r)}$, em que r são os respectivos graus de liberdade. Ou seja, primeiramente você deverá obter um IC_B simétrico para uma transformação de θ cuja posteriori corresponda à distribuição $\chi^2_{(r)}$ e, a partir deste intervalo, obter o IC_B simétrico para θ.(200 pontos)

3. Considere uma única observação da distribuição binomial bivariada, ou seja:

$$p(r,s|\theta,\phi) = \left(\begin{array}{c} m \\ r \end{array}\right) \theta^r (1-\theta)^{m-r} \left(\begin{array}{c} r \\ s \end{array}\right) \phi^s (1-\phi)^{r-s} \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,m\}}(r) \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,r\}}(s), \theta,\phi \in (0,1)^2$$

Responda os itens:

a) Determine a família conjugada natural para o o modelo. (100 pontos)

b) Considere as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$, $\theta_0 \in (0,1)$ conhecido. Suponha a seguinte priori:

$$p(\theta,\phi) = h(\theta)g(\phi) = \left[\alpha \mathbb{1}_{\{\theta_0\}}(\theta) + (1-\alpha)h_1(\theta)\mathbb{1}_{\Theta_{\theta_1}}(\theta)\right] g(\phi), \Theta_{\theta_1} = (0,1) - \{\theta_0\},$$

em que $\alpha \in (0,1)$ (conhecido), $g(\phi) = \mathbb{1}_{(0,1)}(\phi)$ e $h_1(\theta) = 1$, (note que $g(.)$ e $h_1(.)$ são distribuições de probabilidade, em $\Theta_\phi = (0,1)$ e Θ_{θ_1}, respectivamente). Obtenha $B(r,s)$ (fator de Bayes)(250 pontos).

c) Suponha $\theta_0 = 1/2$, $m = 8$, $r = 7$ e $s = 3$. Qual sua conclusão a respeito das hipóteses, usando o fator de Bayes? Justifique, adequadamente, sua resposta. (150 pontos).

Formulário

1. Se $X|\theta \sim U_{[0,\theta]}$, então $p(x|\theta) = \dfrac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$.

2. Se $X|(a,b) \sim \text{Pareto}(a,b)$, então $p(x|a,b) = \dfrac{ab^a}{x^{a+1}} I_{[b,\infty)}(x)$ e $E(X|a,b) = \dfrac{ab}{a-1}$, se $a > 1$.

3. $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx$, $\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

4. $\beta(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \displaystyle\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$.

5. Se $X|(a,b) \sim \text{Galenshore}(a,b)$ então:

- $p(x|a,b) = \dfrac{2}{\Gamma(a)} b^{2a} x^{2a-1} e^{-x^2b^2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ e $\mathcal{E}(X^k|a,b) = \dfrac{1}{b^k}\dfrac{\Gamma(a+k/2)}{\Gamma(a)}$.
- Para $a=1$ e $b = \dfrac{\theta}{\sqrt{2}}$, obtemos a distribuição de Rayleigh(θ).
- Se $W = 2b^2X^2$, $W|(a,b) \sim \chi^2_{(2a)}$.

Teste de Hipóteses Bayesianos

- Fórmulas gerais:
  $O(H_1,H_0) = \dfrac{P(H_1)}{P(H_0)}$, $O(H_1,H_0|\boldsymbol{x}) = \dfrac{P(H_1|\boldsymbol{x})}{P(H_0|\boldsymbol{x})}$, $B(\boldsymbol{x}) = \dfrac{O(H_1,H_0|\boldsymbol{x})}{O(H_1,H_0)}$.

- Para as hipóteses $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, temos que

$$O(H_1,H_0|\boldsymbol{x}) = \frac{S(\theta_0|\boldsymbol{x})}{F(\theta_0|\boldsymbol{x})}$$

- Para as hipóteses $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0, \theta \in \Theta_\theta$, temos

  (Dois parâmetros (θ,ϕ))

  Priori $p(\theta,\phi) = h(\theta)g(\phi) = [\alpha\mathbb{1}_{\{\theta_0\}}(\theta) + (1-\alpha)h_1(\theta)\mathbb{1}_{\Theta_{\theta_1}}(\theta)]g(\phi), \Theta_{\theta_1} = \Theta_\theta - \{\theta_0\}$, $h_1(.)$ é uma distribuição de probabilidade em Θ_{θ_1} e $g(\phi)$ é uma distribuição de probabilidade em Θ_ϕ.

  $B(\boldsymbol{x}) = \dfrac{p_1(\boldsymbol{x})}{p(\boldsymbol{x}|\theta_0)}$, $p_1(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\int_{\Theta_{\theta_1}} p(\boldsymbol{x}|\theta)h_1(\theta)d\theta$, $p(\boldsymbol{x}|\theta) = \displaystyle\int_{\Theta_\phi} p(\boldsymbol{x}|\theta,\phi)g(\phi)d\phi$.

- Para o Fator de Bayes e $O(H_1,H_0|\boldsymbol{x})$

Valor	Evidência a favor de H_1
< 1	Contra
$[1;3)$	Leve
$[3;10)$	Moderada
$[10;30)$	Forte
$[30;100)$	Muito forte
≥ 100	Decisiva