1. a)

Tabela 1: $\overline{Y}$ para o plano Amostral 1 ($PA_1$)

| $\boldsymbol{y}$ | $\{1,4\}$ | $\{1,12\}$ | $\{1,7\}$ | $\{4,7\}$ | $\{4,12\}$ | $\{7,12\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\overline{y}_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
| $\overline{y}_i$ | 2,50 | 4,00 | 5,50 | 6,50 | $8,00$ | 9,50 |
| $\overline{y}_i$ | $\frac{5}{2}$ | 4 | $\frac{11}{2}$ | $\frac{13}{2}$ | 8 | $\frac{19}{2}$ |
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Tabela 2: $\overline{Y}$ para o plano Amostral 2 ($PA_2$)

| $\boldsymbol{y}$ | $\{1,4\}$ | $\{1,7\}$ | $\{4,7\}$ | $\{1,12\}$ | $\{4,12\}$ | $\{7,12\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\overline{y}_i)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
| $\overline{y}_i$ | 2,50 | 4,00 | 5,50 | 6,50 | $8,00$ | 9,50 |
| $\overline{y}_i$ | $\frac{5}{2}$ | 4 | $\frac{11}{2}$ | $\frac{13}{2}$ | 8 | $\frac{19}{2}$ |
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

1. b) $\mu = (1+4+7+12)/4 = 6,00$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{PA_1}(\overline{Y}) &= \sum_{i=1}^{6} \overline{y}_i P(\overline{y}_i) = 6,00, \mathcal{E}_{PA_1}(\overline{Y}^2) = \sum_{i=1}^{6} \overline{y}_i^2 P(\overline{y}_i) = 41,50, \\
\mathcal{V}_{PA_1}(\overline{y}) &= \mathcal{E}_{PA_1}(\overline{Y}^2) - \mathcal{E}_{PA_1}(\overline{Y})^2 = 5,50, \\
VC_{PA_1}(\overline{Y}) &= \mathcal{E}_{PA_1}(\overline{Y}) - \mu = 0, EQM_{PA_1}(\overline{Y}) = \mathcal{V}_{PA_1}(\overline{Y}) + VC_{PA_1}(\overline{Y})^2 = 5,50
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{PA_2}(\overline{Y}) &= \sum_{i=1}^{6} \overline{y}_i P(\overline{y}_i) = 6,00, \mathcal{E}_{PA_2}(\overline{Y}^2) = \sum_{i=1}^{6} \overline{y}_i^2 P(\overline{y}_i) = 40,19, \\
\mathcal{V}_{PA_2}(\overline{Y}) &= \mathcal{E}_{PA_2}(\overline{Y}^2) - \mathcal{E}_{PA_2}(\overline{Y})^2 = 4,1875, VC_{PA_2}(\overline{y}) = \mathcal{E}_{PA_2}(\overline{Y}) - \mu = 0, \\
EQM_{PA_2}(\overline{Y}) &= \mathcal{V}_{PA_2}(\overline{Y}) + VC_{PA_2}(\overline{Y})^2 = 4,19
\end{aligned}
$$

1. c) O estimador é não viesado sob ambos os planos logo, é preferível aquele que leva a menor variância, ou seja, o estimador sob o plano amostral 2.

2. a)

$$\begin{aligned}
EP_{A_2}(\widehat{\mu}) &= \sqrt{\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{s^2}{n}} = \delta \iff \left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{s^2}{n} = \delta^2 \iff \\
\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)s^2 &= \delta^2 \iff \frac{1}{n}s^2 = \delta^2 + \frac{1}{N}s^2 \iff \\
\frac{1}{n} &= \frac{\delta^2}{s^2} + \frac{1}{N} \iff n = \frac{1}{\frac{\delta^2}{s^2}+\frac{1}{N}}
\end{aligned} \tag{1}$$

2. b)

$$P(\Delta_i = 1) = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n\frac{(N-1)!}{(N-n)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}} = \frac{n}{N}.$$

2. c) Para a obtenção da distribuição de $\Delta_i|\Delta_j$ podemos utilizar o fato de que $P(\Delta_i|\Delta_j) = P(\Delta_i,\Delta_j)/P(\Delta_j)$, em que $P(\Delta_i,\Delta_j)$ e $P(\Delta_j)$ são dados na tabela do enunciado. Assim, obtemos a Tabela 3.

Da Tabela 3 temos que $\Delta_i|\Delta_j = 0 \sim Bernoulli\left(\frac{n}{N-1}\right)$ e $\Delta_i|\Delta_j = 1 \sim Bernoulli\left(\frac{n-1}{N-1}\right)$. Assim

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\left(\mathcal{E}(\Delta_i|\Delta_j)\right) &= \frac{N-n}{N}\left(\frac{n}{N-1}\right) + \frac{n}{N}\left(\frac{n-1}{N-1}\right) \\
&= \frac{1}{N(N-1)}\left(Nn - n^2 + n^2 - n\right) = \frac{n(N-1)}{N(N-1)} = \frac{n}{N}
\end{aligned}$$

Tabela 3: Distribuição de $\Delta_i|\Delta_j$ ($AAS_s$), $i \neq j$

| | $\Delta_i$ | |
|---|---|---|
| $\Delta_j$ | 0 | 1 |
| 0 | $\frac{(N-n-1)}{(N-1)}$ | $\frac{n}{(N-1)}$ |
| 1 | $\frac{(N-n)}{(N-1)}$ | $\frac{(n-1)}{(N-1)}$ |

3. a)

$$
\begin{aligned}
n_1 &= nW_1 = 44 \times 0,22 = 10\\
n_2 &= nW_2 = 44 \times 0,44 = 20\\
n_3 &= nW_3 = 44 \times 0,33 = 15.
\end{aligned}
$$

3. b) Sabendo que $\sum_{h=1}^{3} N_h \tilde{s}_h = 150.7,46 + 300.8,22 + 225.9,61 = 5747.25$, temos que

$$
\begin{aligned}
n_1 &= n\frac{N_1\tilde{s}_1}{\sum_{h=1}^{3} N_h\tilde{s}_h} = 44\frac{150 \times 7,46}{5747 \times 25} = 9\\
n_2 &= n\frac{N_2\tilde{s}_2}{\sum_{h=1}^{3} N_h\tilde{s}_h} = 44\frac{300 \times 8,22}{5747 \times 25} = 19\\
n_3 &= n\frac{N_3\tilde{s}_3}{\sum_{h=1}^{3} N_h\tilde{s}_h} = 44\frac{225 \times 9,61}{5747 \times 25} = 17.
\end{aligned}
$$

3. c) Para a alocação proporcional temos que:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{V}}_{AE_1}(\widehat{\mu}_{es}) &= \sum_{h=1}^{H} W_H^2 \frac{\widehat{s}_h^2}{n_h} = 0,22^2 \times \frac{55,6}{10} + 0,44^2 \times \frac{67,5}{20} + 0,33^2 \times \frac{92,35}{15} = 1,60\\
\widehat{EP}_{AE_1}(\widehat{\mu}_{es}) &= 1,26.
\end{aligned}
$$

Para a alocação ótima temos que:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{V}}_{AE_2}(\widehat{\mu}_{es}) &= \sum_{h=1}^{H} W_H^2 \frac{\widehat{s}_h^2}{n_h} = 0,22^2 \times \frac{55,6}{9} + 0,44^2 \times \frac{67,5}{19} + 0,33^2 \times \frac{92,35}{17} = 1,58\\
\widehat{EP}_{AE_1}(\widehat{\mu}_{es}) &= 1,26.
\end{aligned}
$$

3. d) Nota-se que o erro padrão associado a alocação ótima é menor do que o erro padrão associado a alocação proporcional, ou seja, temos indícios de que o estimador da média sob alocação ótima é mais preciso do que o estimador sob alocação proporcional. Alocação ótima, por construção, é sempre melhor (tamanhos amostrais ao longo dos estratos são parecidos).