1. Questão 1

a) Como cada elemento da população tem a mesma probabilidade de ser selecionado, cada amostra também o tem. Como temos um total de $\binom{4}{2} = 6$ amostras possíveis, cada um delas tem a mems probabilidade de ser selecionada, ou seja $P(ij) = 1/6 = 0,17, i < j \in \{1, 2, ..., 6\}$. Assim, as respectivas distribuições de probabilidade dos estimadores $\widehat{\mu}$ e $\widehat{\mu}_c$, são dadas por:

d_s	12	13	14	23	24	34
$\widehat{\mu}$	2,50	4,00	6,50	5,50	8,00	9,50
$p(\widehat{\mu})$	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17

d_s	12	13	14	23	24	34
$\widehat{\mu}$	2,50+c	4,00+c	6,50	5,50	8,00-c	9,50-c
$p(\widehat{\mu})$	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17

b) Do item a), usando as definições das quantidades de interesse $(E(.), \mathcal{V}(.), VC(.), EQM(.))$, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(\widehat{\mu}) &= \frac{1}{6}(2,50 + 4,00 + 6,50 + 5,50 + 8,00 + 9,50) = 6,00 \\
\mathcal{E}(\widehat{\mu}^2) &= \frac{1}{6}\left(2,50^2 + 4,00^2 + 6,50^2 + 5,50^2 + 8,00^2 + 9,50^2\right) = 41,50 \\
\mathcal{V}(\widehat{\mu}) &= 41,50 - 36,00 = 5,50
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(\widehat{\mu}_c) &= \frac{1}{6}(2,50 + c + 4,00 + c + 6,50 + 5,50 + 8,00 - c + 9,50 - c) = 6,00 \\
\mathcal{E}(\widehat{\mu}_c^2) &= \frac{1}{6}\left((2,50 + c)^2 + (4,00 + c)^2 + 6,50^2 + 5,50^2 + (8,00 - c)^2 + (9,50 - c)^2\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(249 - 102,25c + 4c^2\right) \\
\mathcal{V}(\widehat{\mu}_c) &= \frac{1}{6}\left(-102,25c + 4c^2\right) + \frac{249}{6} - \left(\frac{36}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}\left(-22c + 4c^2\right) + \mathcal{V}(\widehat{\mu})
\end{aligned}
$$

c) Do item anterior, vem que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\widehat{\mu}_c) &< \mathcal{V}(\widehat{\mu}) \leftrightarrow \frac{1}{6}(-22c+4c) < 0 \leftrightarrow 4c < 22 \\
&\leftrightarrow -\frac{22}{4} < c < \frac{22}{4} \leftrightarrow -5,50 < c < 5,50
\end{aligned}$$

Assim, como $c > 0$, temos que ter $c \in (0; 5,50)$

2. Questão 2

a) Como cada elemento (e consequentemente cada par de elementos) tem a mesma probabilidade de ser selecionado, temos que:

$$\begin{aligned}
P(\Delta_i = 1, \Delta_j = 1) &= \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!}}{\frac{N(N-1)(N-2)!}{n(n-1)(n-2)!(N-n)!}} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \\
P(\Delta_i = 0, \Delta_j = 0) &= \frac{\binom{N-2}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{(N-2)!}{n!(N-n-2)!}}{\frac{N(N-1)(N-2)!}{n!(N-n)(N-n-1)(N-n-2)!}} = \frac{(N-n)(N-n-1)}{N(N-1)} \\
P(\Delta_i = 1, \Delta_j = 0) &= \frac{\binom{N-2}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{(N-2)!}{(n-1)!(N-n-1)!}}{\frac{N(N-1)(N-2)!}{n(n-1)!(N-n)(N-n-1)!}} = \frac{n(N-n)}{N(N-1)}
\end{aligned}$$

	Δ_i		
Δ_j	0	1	
0	$\frac{(N-n)(N-n-1)}{N(N-1)}$	$\frac{n(N-n)}{N(N-1)}$	$\frac{N-n}{N}$
1	$\frac{n(N-n)}{N(N-1)}$	$\frac{n(n-1)}{N(N-1)}$	$\frac{n}{N}$
	$\frac{N-n}{N}$	$\frac{n}{N}$	1

b) Do item a), vem que:

$$P(\Delta_i = 1) = P(\Delta_i = 1, \Delta_j = 0) + P(\Delta_i = 1, \Delta_j = 1) = \frac{n^2 - n + nN - n^2}{N(N-1)} = \frac{n}{N}$$

Assim, $\Delta_i \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{n}{N}\right)$, e, portanto, $\mathcal{E}(\Delta_i) = \frac{n}{N}$, $\mathcal{V}(\Delta_i) = \frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right)$

c) Temos, do item a), que:

$$E(\Delta_i\Delta_j) = P(\Delta_i = 1, \Delta_j = 1) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$$

Além disso, usando o item b) e o resultado anterior ($\mathcal{E}(\Delta_i\Delta_j)$), vemos que

$$\begin{aligned} Cov(\Delta_i, \Delta_j) &= \mathcal{E}(\Delta_i\Delta_j) - \mathcal{E}(\Delta_i)\mathcal{E}(\Delta_j) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \frac{n^2}{N^2} \\ &= \frac{Nn^2 - Nn - n^2N + n^2}{N^2(N-1)} = -\frac{n(N-n)}{N^2(N-1)} \end{aligned}$$

Portanto, do item a) e do resultado anterior ($Cov(\Delta_i, \Delta_j)$)

$$Corre(\Delta_i, \Delta_j) = \frac{Cov(\Delta_i, \Delta_j)}{DP(\Delta_i)DP(\Delta_j)} = \frac{-\frac{n(N-n)}{N^2(N-1)}}{\frac{n}{N}\frac{N-n}{N}} = -\frac{1}{N-1}$$

Uma vez que $Corre(\Delta_i, \Delta_j) \neq 0$, então Δ_i e Δ_j são (probabilisticamente) dependentes.

3. Questão 3

a) Temos que (basta fazer as contas indicadas pelo título de cada coluna), como resultado (via Excel e feito à mão), respectivamente:

Tabela 1: Alocação Proporcional (via Excel)

h	N_h	W_h	n_h	f_h	$\widetilde{\mu}_h$	$\widetilde{s}^2_h$	$W_h\widetilde{\mu}_h$	$W^2_h\widetilde{s}^2_h$	$\frac{N_h-1}{N-1}\widetilde{s}^2_h$	$\frac{N_h}{N-1}(\widetilde{\mu}_h-\widetilde{\mu})^2$	$W^2_h(1-f_h)\frac{\widetilde{s}^2_h}{n_h}$
1	40	0,13	6	0,15	30,00	157,00	4,00	2,79	20,48	2,03	0,40
2	180	0,60	24	0,13	25,00	88,00	15,00	31,68	52,68	47,68	1,14
3	55	0,18	8	0,15	79,00	120,00	14,48	4,03	21,67	374,15	0,43
4	25	0,08	4	0,16	5,00	1,45	0,42	0,01	0,12	69,83	$<0,01$
Total	300	1,00	42				33,90	38,51	94,95	493,70	1,97

Tabela 2: Alocação Proporcional (via calculadora, usando os resultados da tabela)

h	N_h	W_h	n_h	f_h	$\widetilde{\mu}_h$	$\widetilde{s}_h^2$	$W_h\widetilde{\mu}_h$	$W_h^2\widetilde{s}_h^2$	$\frac{N_h-1}{N-1}\widetilde{s}_h^2$	$\frac{N_h}{N-1}(\widetilde{\mu}_h-\widetilde{\mu})^2$	$W_h^2(1-f_h)\frac{\widetilde{s}_h^2}{n_h}$
1	40	0,13	6	0,15	30,00	157,00	3,90	2,79	20,48	2,03	0,38
2	180	0,60	24	0,13	25,00	88,00	15,00	31,68	52,68	47,68	1,14
3	55	0,18	8	0,15	79,00	120,00	14,22	4,03	21,67	374,15	0,42
4	25	0,08	4	0,16	5,00	1,45	0,40	0,01	0,12	69,83	<0,01
Total	300	1,00	42				33,52		94,95	493,70	1,94

b) Aplicação da item 3) do formulário: (via excel) $\widetilde{\mu}_{es} = 33,90, \widetilde{\mathcal{V}}_{APer}(\widetilde{\mu}_{es}) = 1,97, \widetilde{EP}_{APer}(\widetilde{\mu}_{es}) = 1,40$; (via calculadora, usando os resultados da tabela) $\widetilde{\mu}_{es} = 33,52, \widetilde{\mathcal{V}}_{APer}(\widetilde{\mu}_{es}) = 1,94, \widetilde{EP}_{APer}(\widetilde{\mu}_{es}) = 1,39$.

c) Aplicação dos itens 1) e 3) do formulário (lembrando que $\mathcal{V}_{A_2}(\widehat{\mu}) = (1-f)\,\frac{s^2}{n}$): $s^2 = s_{d'}^2 + s_{e'}^2 = 94,95 + 493,70 = 588,65$. Assim $\widetilde{\mathcal{V}}_{A_2}(\widehat{\mu}) = (1-f)\dfrac{\widetilde{s}^2}{n} = \left(1 - \dfrac{42}{300}\right)\dfrac{588,65}{42} = 12,05$, $\widetilde{EP}_{A_2}(\widehat{\mu}) = \sqrt{12,05} = 3,47$. $EPA\left(\dfrac{AE_2}{AAS_s}\right) = \dfrac{1,97}{12,05} = 0,16$. Sim, o resultado era esperado pois, aparentemente, o processo de estratitificação fora bem sucedido, uma vez que aproximadamente $100\dfrac{493,70}{588,65} = 83,87$ da variabilidade é devida a diferença entre os estratos.