

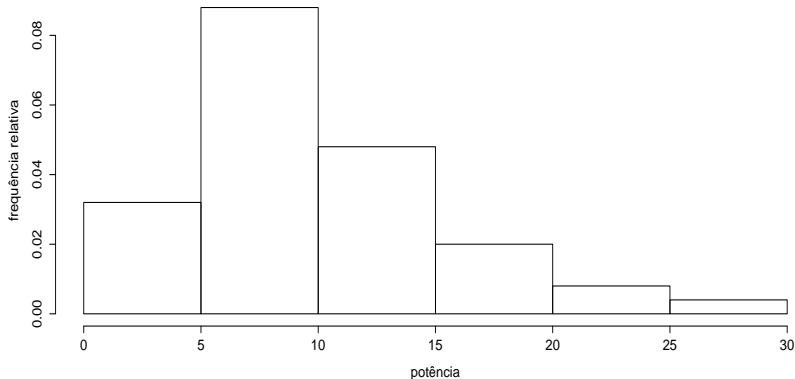
Métodos analíticos e numéricos para a obtenção de distribuições à posteriori: exemplos univariados

Prof. Caio Azevedo

Exemplo: dados da potência de turbina de aviões

- Conjuntos de dados relativos ao desempenho de 5 tipos de turbina de avião. Tempo (em unidade de milhões de ciclos) até a perda de velocidade.
- Objetivo inicial: comparar os tipos de turbinas.
- Por enquanto, vamos considerar que as turbinas são de um único tipo.
- Seja x_i o tempo (observado) até a perda de velocidade da i -ésima turbina.
- Objetivo: fazer inferência sobre o tempo médio até a perda da velocidade.

Histograma dos dados das turbinas



Modelagem

- Vamos assumir que $X_i|r \stackrel{i.i.d}{\sim} \text{gama}(r, \lambda)$ com λ conhecido (por enquanto). Neste caso $\mathcal{E}(X_i|r) = r\lambda$.
- Assim

$$p(x|r) = \frac{1}{\lambda^r \Gamma(r)} e^{-x/\lambda} x^{r-1} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)$$

- Verossimilhança:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}|r) &= \frac{1}{\lambda^{nr} \Gamma(r)^n} e^{-n\bar{x}/\lambda} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} \\ &\propto \frac{1}{\lambda^{nr} \Gamma(r)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} \end{aligned}$$

- Qual é a família conjugada de priors?

Modelagem

- Posteriori :

$$\begin{aligned}
 p(r|\mathbf{x}) &= \frac{\frac{1}{\lambda^{nr}\Gamma(r)^n} e^{-n\bar{x}/\lambda} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} p(r)}{\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^{nr}\Gamma(r)^n} e^{-n\bar{x}/\lambda} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} p(r) dr} \\
 &= \frac{\frac{1}{\lambda^{nr}\Gamma(r)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} p(r)}{\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^{nr}\Gamma(r)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} p(r) dr} = \frac{\frac{1}{\lambda^{nr}\Gamma(r)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} p(r)}{p(\mathbf{x})}
 \end{aligned}$$

- Independentemente da priori escolhida não é possível obter a posteriori de forma analítica (exata).

Modelagem

- A integral correspondente à constante de normalização não tem solução analítica exata, independentemente da escolha da priori.
- Pode-se obter aproximações:
 - Para a posteriori (sem se obter momentos e quantis).
 - Somente para os momentos e quantis (sem se obter aproximação para a posteriori).
 - Posteriori, momentos e quantis.

Obtenção das posteriores (marginais)

- Métodos Analíticos:
 - Aproximação à distribuição normal.
 - Método de Laplace.
- Métodos Numéricos:
 - Integração/Maximização numéricas.
 - Métodos de simulação estocástica não iterativos (como no problema da comparação das médias de duas dist. de Poisson e da comparação das médias de duas dist. normais com variâncias desconhecidas e diferentes).
 - Métodos de simulação estocástica de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC).

Características (Métodos Analíticos)

- Aproximação à distribuição normal: fornece, simultaneamente, aproximação da própria posteriori bem como dos momentos e quantis.
- Aproximação de Laplace: fornece aproximação da posteriori mas os momentos e quantis tem de ser calculados posteriormente.

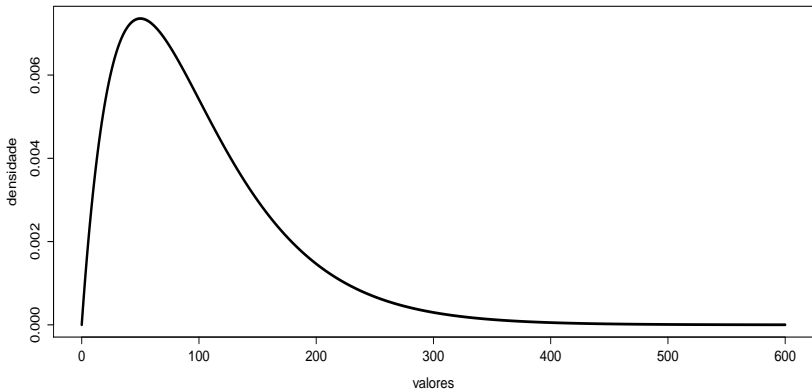
Características (Métodos Numéricos)

- Integração/Maximização numéricas: fornecem aproximação da posteriori mas os momentos e quantis tem de ser calculados posteriormente.
- Métodos de simulação estocástica (não iterativos e MCMC): fornecem uma amostra aleatória das posteriores e, de posse desta, pode-se estimar (não parametricamente) as posteriores e calcular medidas -resumo para estimar os momentos e quantis.
- As vezes, tem-se de usar métodos analíticos e numéricos em conjunto.

Voltando ao exemplo

- Suponha que o pesquisador (responsável pelo experimento) tenha fornecido as seguintes informações:
 - De experimentos anteriores: $\tilde{\lambda} \approx 2,66$.
 - À priori: $\mathcal{E}(r) = 100$ e $\mathcal{V}(r) = 5000$.
- Assim, vamos assumir que : $r \sim \text{gama}(\alpha, \gamma)$, ($\alpha = 2, \gamma = 50$).

Priori



Aproximação à distribuição normal (univariada)

- Lembrando: $p(\theta)$: priori, $p(\mathbf{x}|\theta)$: verossimilhança e $p(\theta|\mathbf{x})$ (posteriori).
- Sob certas condições de regularidade (expansão em séries de Taylor), pode-se aproximar a distribuição à posteriori de interesse como:

$$p(\theta|\mathbf{x}) \approx \frac{\sqrt{h_n}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{h_n}{2} (\theta - m_n)^2 \right\}$$

em que $h_n = h_0 + h(\tilde{\theta})$, $m_n = h_n^{-1} (h_0 m_0 + h(\tilde{\theta})\tilde{\theta})$.

Cont.

- m_0 é a moda da distribuição à priori (calculada, eventualmente, de modo numérico).
- $\tilde{\theta}$ é a estimativa de máxima verossimilhança de θ (calculada, eventualmente, de modo numérico).

- $$h_0 = - \left. \frac{d^2 \ln p(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=m_0}$$

- $$h(\tilde{\theta}) = - \left. \frac{d^2 \ln p(\mathbf{x}|\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\tilde{\theta}}$$

Característica da AN (aproximação à distribuição normal)

- Relativamente rápida.
- Útil quando as obtenções da moda da priori e do estimador de MV são simples.
- Os estimadores (EAP, MAP, MeAP, EPAP) e intervalos de credibilidade não, necessariamente, respeitarão o espaço paramétrico.
- Quanto mais distante da dist. normal for a posteriori, maior tem de ser o tamanho da amostra para que a aproximação seja satisfatória.

Voltando ao exemplo

- Lembremos que $r \sim \text{gama}(\alpha, \gamma)$, ou seja,

$$p(r) = \frac{1}{\gamma^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-r/\gamma} r^{\alpha-1} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(r)$$

- Assim

$$-\frac{d^2 \ln p(r)}{dr^2} = \frac{(\alpha - 1)}{r^2}$$

$$-\frac{d^2 \ln p(\mathbf{x}|r)}{dr^2} = \frac{n}{(\Gamma(r))^2} \left[\Gamma''(r)\Gamma'(r) - (\Gamma'(r))^2 \right] = n\Psi'(r)$$

- Neste caso, $m_0 = \gamma(\alpha - 1)$. contudo, a estimativa de mv de r não é obténivel analiticamente. Assim, alguma método numérico de maximização deve ser empregado.

Usando o programa R

- A função *optim*, do programa R, permite maximizar funções utilizando algum algoritmo numérico (otimizador). Particularmente, pode-se usar o método BFGS (ver notas de aula de Métodos Computacionais em Estatística).
- Tal função já vem pré instalada no R.
- Para utilizar os algoritmos de Newton-Raphson ou Escore de Fisher, pode-se recorrer ao pacote *maxLik* (usando a função *maxLik*).

Função optim

- Comandos no R: obtenção da estimativa de máxima verossimilhança
ComoptimIB1

```
# função optim
```

```
fr<- function(r,lambda,n,v.x)
```

```
{  
  logl<- -n*log(gamma(r))-n*r*log(lambda) +  
  (r-1)*sum(log(v.x))  
  return(-logl)  
}
```

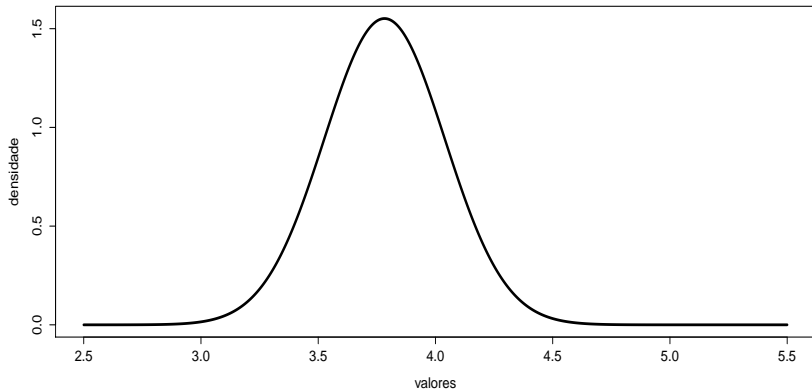
```
# Aproximação pela normal
```

```
resultlik<-optim((mean(v.x)^2/var(v.x)),fr,lambda=  
lambda,n=n,v.x=v.x,method="BFGS",hessian=T)  
r.mv <- resultlik$par  
h.r <- resultlik$hessian
```

Aplicação da aproximação à normal

- Neste caso, $m_0 = 50$, $\tilde{r} = 3,78$, $h_0 = 0,0004$, $h(\tilde{r}) = 15,12$
- Assim, $r|\mathbf{x} \approx N(3,78, 0,07)$.
- Portanto, $\tilde{r}_{EAP} \approx \tilde{r}_{MAP} \approx \tilde{r}_{MeAP} \approx 3,78$, $EPAP(r) \approx 0,26$.
- $IC_B(r, 95\%) \approx [3,28; 4,29]$.

Aproximação à normal



Aproximação de Laplace (AL)

- Suponha que desejamos calcular $\int_a^b e^{Mf(x)} dx$. Admita que exista um único máximo global para $f(\cdot)$
- Seja x_0 o máximo global de $f(\cdot)$. Então :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R$$

$$R = O[(x - x_0)^3]$$

- Portanto:

$$f(x) \approx f(x_0) - \frac{1}{2}|f''(x_0)|(x - x_0)^2$$

Cont.

■ Aproximação de Laplace:

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{Mf(x)} dx &\approx e^{Mf(x_0)} \int_a^b e^{-M|f''(x_0)|(x-x_0)^2/2} dx \\ &= \sqrt{2\pi} e^{Mf(x_0)} \sigma \left\{ \Phi\left(\frac{b-x_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-x_0}{\sigma}\right) \right\}\end{aligned}$$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, $\sigma^2 = (M|f''(x_0)|)^{-1}$, $\Phi(\cdot)$ é a fda da normal padrão.

Característica da AL

- Relativamente rápida.
- Adequada quando o integrando é unimodal e o máximo pode ser obtido facilmente (ainda que seja necessário utilizar métodos numéricos).
- Inadequada: em integrais múltiplas à medida que a dimensão aumenta e/ou o máximo é complicado de ser obtido.
- Os estimadores (EAP,MAP,MeAP, EPAP) e intervalos de credibilidade não, necessariamente, respeitarão o espaço paramétrico.

Cont. do exemplo da distribuição gama

- Nosso objetivo é utilizar a aproximação de Laplace para calcular:

$$\int_0^\infty g(r) dr = \int_0^\infty e^{f(r)} dr, \text{ em que } f(r) = \ln g(r), M = 1$$

$$p(\mathbf{x}|r)p(r) = g(r) = \frac{1}{\lambda^{nr}\Gamma(r)^n} e^{-n\bar{x}/\lambda} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} \frac{\gamma^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-r/\gamma} r^{\alpha-1}$$

- Note que, neste caso, o ponto de máximo r_0 corresponde à moda da posteriori (MAP).
- Além disso, $f''(r) = -\left[n\Psi'(r) + \frac{\alpha-1}{r}\right]$

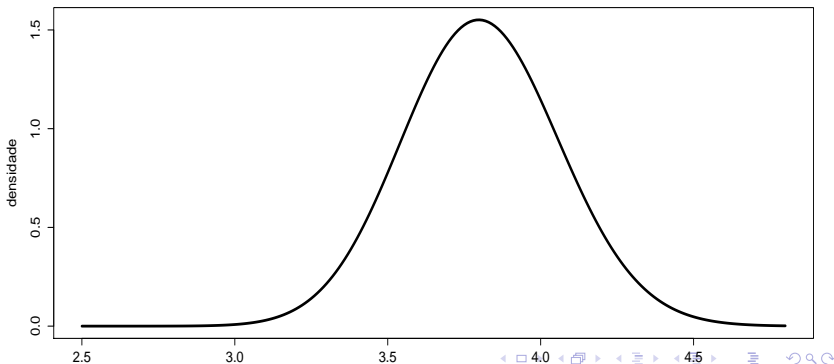
Aproximação de Laplace no R

ALIB

```
fpost<- function(r,lambd,n,v.x,alphap,gammap)
{
logl<- -n*loggamma(r)-n*r*log(lambda) - n*mean(v.x)/lambda
+ (r-1)*sum(log(v.x)) -r/gammap +(alphap-1)*log(r) -
alphap*log(gammap) - loggamma(alphap)
return(-logl)
}
resultpost<-optim((mean(v.x)^2/var(v.x)),fpost,lambd=lambd,
n=n,v.x=v.x,alphap=alphap,gammap=gammap,method="BFGS"
,hessian=T)
r0 <- resultpost$par
h.r0 <- resultpost$hessian
#####
# Aproximação da constante de normalização
sigma <- solve(sqrt(abs(h.r0)))
cn <-
sqrt(2*pi)*exp(-fpost(r0,lambd,n,v.x,alphap,gammap))*sig
ma*(1-pnorm(-r0/sigma))
auxpost <- seq(2.5,4.8,0.01)
fpostAL <-
exp(-fpost(auxpost,lambd,n,v.x,alphap,gammap))/cn
plot(auxpost,fpostAL,type="l",xlab="valores",ylab="densid
ade",main="",cex=1.3,cex.lab=1.3,cex.axis=1.3,lwd=4)
```


Cont. do exemplo da distribuição gama

- Assim $\int_0^{\infty} g(r) dr \approx e^{f(r_0)} \sqrt{2\pi} (f''(r_0))^{-1} = 1,526686e - 67$



Comentários

- Note que obtivemos apenas uma aproximação para a constante de normalização.
- Lembre, ainda, que

$$\mathcal{E}(h(r)|\mathbf{x}) = \frac{\int_0^\infty h(r) \frac{1}{\lambda^{nr} \Gamma(r)^n} e^{-n\bar{x}/\lambda} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} p(r) dr}{\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^{nr} \Gamma(r)^n} e^{-n\bar{x}/\lambda} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} p(r) dr} = \frac{\int_0^\infty h(r) g(r) dr}{\int_0^\infty g(r) dr}$$

- Assim, para obtermos, por exemplo, o EAP, teríamos que também aproximar $\int_0^\infty r g(r) dr$. Para obter o DPAP teríamos também que aproximar $\int_0^\infty r^2 g(r) dr$.

Comentários

- Posteriori:

$$p(r|\mathbf{x}) = \frac{\frac{1}{\lambda^{nr}\Gamma(r)^n} e^{-n\bar{x}/\lambda} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} p(r)}{\int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^{nr}\Gamma(r)^n} e^{-n\bar{x}/\lambda} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} p(r) dr} = \frac{g(r)}{\int_0^{\infty} g(r) dr}$$

- Para obtermos o estimador MAP, teríamos que maximizar $g(r)$.
- Para obtermos a MeAP, temos que encontrar o valor “ q ”, solução da seguinte equação

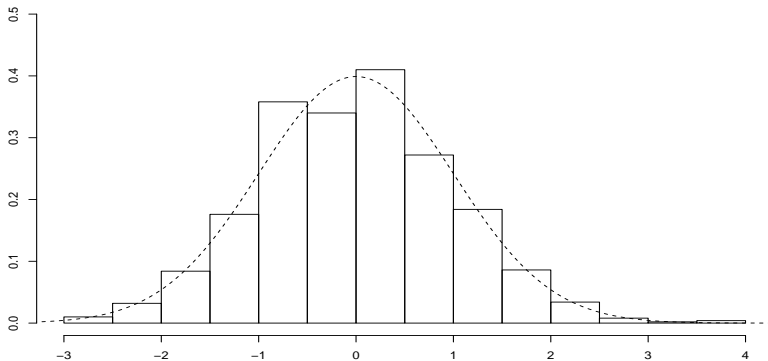
$$F(q|\mathbf{x}) = 1/2 \Leftrightarrow \int_0^q g(r) dr = 1/2 \int_0^{\infty} g(r) dr.$$

- Nesse caso, métodos numéricos devem ser empregados para se obter o MAP e o MdAP. Falaremos sobre eles adiante.

Integração por Quadratura

- Substituir (no caso univariado) o cálculo da área sob a curva pela soma das áreas de um número finito de retângulos.
- Substituir (no caso multivariado) o cálculo da área sob a curva pela soma das áreas de um número finito de paralelepípedos.
- Ponto-chave: Definir os pontos e pesos de quadratura.
- Formas de cálculo dos pontos e pesos:
 - Não-adaptativa: mantem-se fixo os pontos e pesos.
 - Adaptativa: muda-se os pontos e/ou os pesos.

Graficamente



Características

- Em geral, na Estatística, deseja-se calcular

$$\mathcal{E}(w(X)) = \int_a^b w(x)f(x)dx, \text{ onde } f(.) \text{ é alguma fdp.}$$

- Sendo assim, $f(.)$ terá massa relevante em apenas um subconjunto de \mathcal{R} .
- Define-se um conjunto de pontos, x_1, x_2, \dots, x_m e os respectivos pesos associados $A_1, A_2, \dots, A_m, A_i = A(x_i)$. Via de regra, os pesos correspondem aos comprimentos dos intervalos determinados pelos pontos de quadraturas.
- Pode-se imaginar que cada ponto corresponde ao valor médio de intervalos de mesmo comprimento.

Cont.

- Assim

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^m A_i w(x_i)f(x_i)$$

- Existem várias formas de se determinar os pontos e pesos. Em geral, isto é feito a partir do máximo (moda) de $f(\cdot)$. Pontos ótimos, em muitos casos, são obtidos através de certos polinômios.
- Polinômios de Gauss-Hermite, Gauss-Legendre, Jacobi, Legendre, Gauss-Laguerre etc. Veja Abramowitz & Stegun (1972).

Quadratura Adaptativa

- Atualização dos pontos e/ou dos pesos de quadratura.
- Nosso interesse continua sendo calcular $h = \int_a^b w(x)f(x)dx$.
- Algoritmo
 - Calcule duas aproximações para h ,
$$S_1 = S(f(x); a, b) = \sum_{i=1}^m A_i w(x_i) f(x_i)$$
 e
$$S_2 = S(f(x); a, (a+b)/2) + S(f(x); (a+b)/2, b)$$
 - Calcule $\epsilon = |S_1 - S_2|$.
 - Se $\epsilon < \tau$, pare, caso contrário, aplique o passo 1, recursivamente, até que a precisão requerida seja atingida.

Quadratura Adptativa no R

- Função **integrate** (já vem instalada nas versões mais recentes).
- Permite calcular integrais, usando a quadratura adaptativa, para funções pré-definidas pelo usuário, em um dado intervalo.

Voltando ao exemplo

- Posteriori :

$$p(r|\mathbf{x}) = \frac{\frac{1}{\lambda^{nr}\Gamma(r)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} p(r)}{\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^{nr}\Gamma(r)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} p(r) dr}$$

- Momentos à posteriori

$$\mathcal{E}(h(r)|\mathbf{x}) = \frac{\int_0^\infty h(r) \frac{1}{\lambda^{nr}\Gamma(r)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} p(r) dr}{\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^{nr}\Gamma(r)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} p(r) dr}$$

- Numericamente

$$\mathcal{E}(h(r)|\mathbf{x}) \approx \frac{\sum_{j=1}^m h(r_j) \frac{1}{\lambda^{nr_j}\Gamma(r_j)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r_j-1} p(r_j) A_j}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda^{nr_j}\Gamma(r_j)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r_j-1} p(r_j)}$$

Função integrate: comandos no R

Como integrateIB1

```
fpost<- function(r,lambda,n,v.x,alpha,gamma)
{
logl<- -n*loggamma(r)-n*r*log(lambda) + (r-1)*sum(log(v.x))
-r/gamma + (alpha-1)*log(r) - (alpha-1)*log(gamma)
#logl<- -n*loggamma(r)-n*r*log(lambda) - n*mean(v.x)/lambda
+ (r-1)*sum(log(v.x)) -r/gamma + (alpha-1)*log(r) -
alpha*log(gamma) - loggamma(alpha)
return(exp(logl))
}
```

```
cn<-integrate(fpost,0,Inf,lambda,n,v.x,alpha,gamma)$value
auxpost <- seq(2.5,4.8,0.01)
fpostQA <- (fpost(auxpost,lambda,n,v.x,alpha,gamma))/cn
plot(auxpost,fpostQA,type="l",xlab="valores",ylab="densidade",
main="",cex=1.3,cex.lab=1.3,cex.axis=1.3,lwd=4)
```

Função integrate

- Comandos no R: cálculo da esperança a posteriori

```

Como integrateEAPIB1
fpostEAP<- function(r,lambda,n,v.x,alpha,gamma)
{
logl<- -n*log(gamma(r))-n*r*log(lambda) +
(r-1)*sum(log(v.x)) -r/gamma + (alpha-1)*log(r) -
(alpha-1)*log(gamma)
#logl<- -n*log(gamma(r))-n*r*log(lambda) -
n*mean(v.x)/lambda + (r-1)*sum(log(v.x)) -r/gamma
+(alpha-1)*log(r) - alpha*log(gamma) -
log(gamma(alpha))
return(r*exp(logl))
}

```

```

EAP<-integrate(fpostEAP,0,Inf,lambda,n,v.x,alpha,
gamma)$value/cn

```

Função integrate

- Comandos no R: cálculo do desvio-padrão a posteriori

```

Como integrateEPAPIB1
fpostEAP2<- function(r, lambda, n, v.x, alphap, gammap)
{
logl<- -n*log(gamma(r))-n*r*log(lambda) +
(r-1)*sum(log(v.x)) -r/gammap +(alphap-1)*log(r) -
(alphap-1)*log(gammap)
#logl<- -n*log(gamma(r))-n*r*log(lambda) -
n*mean(v.x)/lambda + (r-1)*sum(log(v.x)) -r/gammap
+(alphap-1)*log(r) - (alphap-1)*log(gammap)
return((r^2)*exp((logl)))
}

```

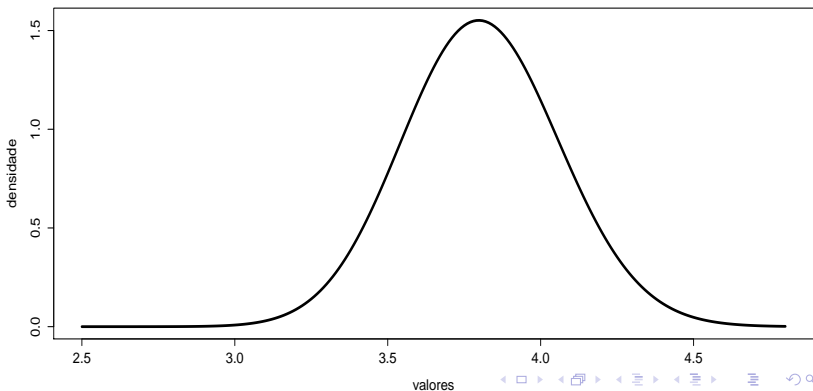
```

EPAP<-sqrt(integrate(fpostEAP2,0,Inf,lambda,n,v.x,
alphap,gammap)$value/cn -EAP^2)

```

Função integrate: posteriori, EAP e DPAP

- $\tilde{r}_{EAP} \approx 3,81$, $EPAP(r) \approx 0,26$.



Continuação: Moda a Posteriori

- Maximização numérica da posteriori (para obter o MAP) usando a função optim. Note que, é equivalente a maximizar o log da posteriori, ou seja:

$$\ln p(r|\mathbf{x}) = \ln p(\mathbf{x}|r) + \ln p(r) + cn$$

cn = constante de normalização.

- Pode-se usar $-\left(\frac{d^2 \ln p(r|\mathbf{x})}{dr^2}\right)^{-1/2} \Big|_{r=r_0}$ como medida de precisão associada ao MAP, em que r_0 é a estimativa MAP.
- $\tilde{r}_{MAP} \approx 3,80$.

Função optim (obtenção da moda à posteriori)

```

                                ComoptimModaIB1
fpost<- function(r,lambda,n,v.x,alphap,gammap)
{
  logl<- -n*loggamma(r)-n*r*log(lambda) -
  n*mean(v.x)/lambda + (r-1)*sum(log(v.x)) -r/gammap
  +(alphap-1)*log(r) - alphap*log(gammap) -
  loggamma(alphap)
  return(-logl)
}
resultpost<-optim((mean(v.x)^2/var(v.x)),fpost,lambda=
lambda,n=n,v.x=v.x,alphap=alphap,gammap=gammap
,method="BFGS",hessian=T)
r0 <- resultpost$par
h.r0 <- resultpost$hessian

```


Continuação: Mediana a Posteriori

- Por definição

$$F(r_{MeAP}|\mathbf{x}) = 0,5$$

- Podemos resolver a equação acima usando o algoritmo de Newton Raphson:

$$r^{(t)} = r^{(t-1)} - \left(p(r^{(t-1)}|\mathbf{x}) \right)^{-1} F(r^{(t-1)}|\mathbf{x}), t = 1, 2, \dots$$

- $\tilde{r}_{MdAP} \approx 3,80$.

Comandos no R: cálculo da mediana a posteriori

Como obterMed

```
q10<-4
iter <-1
while(iter<=10)

{
  gr1 <-
  integrate(fpost,0,q10,lambda,n,v.x,alpha,gamma)$
  value/cn -0.5
  hr1 <- fpost(q10,lambda,n,v.x,alpha,gamma)/cn
  q1t <- q10 - solve(hr1)*gr1
  iter <- iter + 1
  q10 <- q1t
}
```

Integração por Monte Carlo

- Lei Forte dos Grandes Números: Seja X_1, X_2, \dots uma sequência i.i.d. (condicionada em um vetor de parâmetros θ), tal que $\mathcal{E}(X_i|\theta) = \mu, |\mu| < \infty, \forall i$. Então

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{q.c.} \mu$$

- Integração por Monte Carlo.
 - 1 Gere um conjunto de m variáveis aleatórias i.i.d, digamos X_1, X_2, \dots, X_m .
 - 2 Calcule $h \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m w(x_i)$.

Integração por Monte Carlo

- Em outras palavras, as integrais de interesse devem ser escritas como o valor esperado de alguma variável aleatória com distribuição conhecida.
- Voltando ao exemplo. Obtendo a constante de normalização:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^{nr} \Gamma(r)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} p(r) dr = \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^{nr} \Gamma(r)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} \frac{e^{-r/\gamma} r^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) \gamma^{\alpha}} dr \\
 &\equiv \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^{nr} \Gamma(r)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} e^{-r/\gamma} r^{\alpha-1} \phi e^{r/\phi} \left(\frac{e^{-r/\phi}}{\phi} \right) dr \\
 &= \int_0^{\infty} w(r) \frac{e^{-r/\phi}}{\phi} dr = \mathcal{E}(W(R)|\phi)
 \end{aligned}$$

Integração por Monte Carlo

- Em que $\phi = 3,78$ (estimativa de mv) e

$$w(r) = \frac{1}{\lambda^{nr} \Gamma(r)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} \phi e^{-r(1/\gamma+1/\phi)} r^{\alpha-1}.$$

- Então, $I = \mathcal{E}(W(R)|\phi)$, em que $R|\phi \sim \exp(\phi)$.
- Portanto, para aproximar a integral acima, podemos simular uma amostra aleatória de tamanho m de uma va $\exp(\phi)$, digamos r_1, \dots, r_m , e calcular

$$I \approx \phi \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda^{nr_j} \Gamma(r_j)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r_j-1} e^{-r_j(1/\gamma+1/\phi)} r_j^{\alpha-1}$$

Integração por Monte Carlo

- Para o cálculo de $\mathcal{E}(r|\mathbf{x})$ e $\mathcal{E}(r^2|\mathbf{x})$, os desenvolvimentos são análogos. Mais especificamente.

$$I_1 = \mathcal{E}(r|\mathbf{x}) = \int_0^{\infty} w_1(r) \frac{e^{-r/\phi}}{\phi} dr = \mathcal{E}(W(R)|\phi)$$

e

$$I_2 = \mathcal{E}(r^2|\mathbf{x}) = \int_0^{\infty} w_2(r) \frac{e^{-r/\phi}}{\phi} dr = \mathcal{E}(W(R)|\phi)$$

$$\text{em que } w_1(r) = \frac{1}{\lambda^{nr} \Gamma(r)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} \phi e^{-r(1/\gamma+1/\phi)} r^{\alpha-1} r e$$

$$w_2(r) = \frac{1}{\lambda^{nr} \Gamma(r)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r-1} \phi e^{-r(1/\gamma+1/\phi)} r^{\alpha-1} r^2.$$

Integração por Monte Carlo

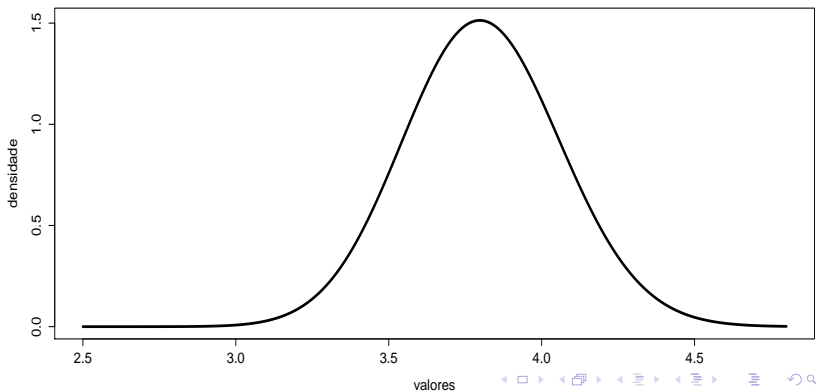
- Portanto, tais integrais podem ser aproximadas por, respectivamente

$$I_1 \approx \phi \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda^{nr_j} \Gamma(r_j)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r_j-1} e^{-r_j(1/\gamma+1/\phi)} r_j^{\alpha-1} r_j$$

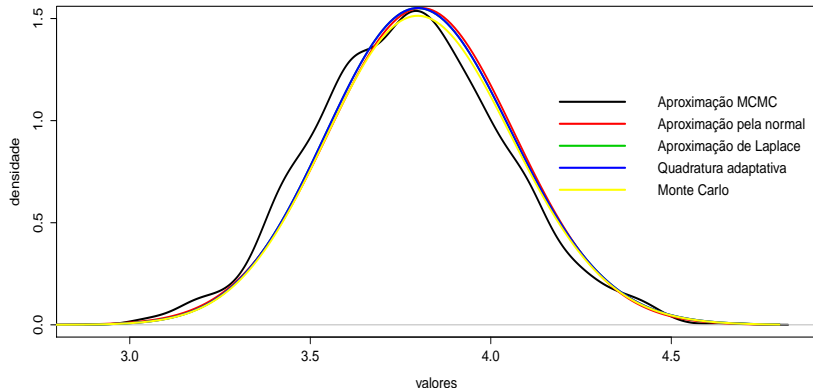
$$I_2 \approx \phi \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda^{nr_j} \Gamma(r_j)^n} \prod_{i=1}^n x_i^{r_j-1} e^{-r_j(1/\gamma+1/\phi)} r_j^{\alpha-1} r_j^2$$

Integração por Monte Carlo : posteriori, EAP e DPAP

- $\tilde{r}_{EAP} \approx 3,80$, $EPAP(r) \approx 0,26$.



Comparação entre as aproximações da posteriori



Comparação entre o modelo gama ajustado e os dados (estimativas via quadratura adaptativa)

