

MI - 402 Inferência Estatística
Segundo semestre de 2022
Lista de exercícios IX

1. Resolva todos os exercícios deixados em sala.
2. Bickel & Doksum, pag. 71 a 74, exercícios: 1) a); 2) a), b), c); 3) a), b), c); 4) a); 13); 14); 15).
3. Para todos os modelos estatísticos vistos/estudados (considerando sempre um único parâmetro como desconhecido) encontre as família conjugadas de priori, bem como as respectivas posteriores. Apresente também: média, moda, mediana e desvio-padrão a posteriori.
4. Para todas as distribuições da Questão 3), encontre um Intervalo de Credibilidade γ para o parâmetro de interesse.
5. Para todas as distribuições da Questão 3), encontre os testes de hipótese Bayesianos para as hipóteses $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.
6. Considerando as questões 4, 5, 6, 7 e 8 da Lista VII, encontre quantidades pivotais assintóticas para os parâmetros desconhecidos. Com tais q.p.'s encontre intervalos de confiança assintóticos, com c.c de aproximadamente γ .
7. Dizemos que uma v.a. contínua X tem distribuição gama-inversa de parâmetros r e λ , $X \sim \text{gama-inversa}(r, \lambda)$ se sua f.d.p é da forma:

$$f_X(x; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\Gamma(r)\lambda^r} x^{-r-1} e^{-\frac{1}{\lambda x}} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x), r > 0, \lambda > 0$$

Calcule $\mathcal{E}(X^k)$, $k > 0$ e $\mathcal{V}ar(X)$.

8. Seja X_1, \dots, X_n uma a.a. de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ com μ conhecido. Assuma que, a priori, $\sigma^2 \sim \text{gama-inversa}(r, \lambda)$, com r e λ conhecidos. Considere a função de perda quadrática. Responda os itens:

- a) Encontre o estimador de Bayes sob perda quadrática de σ^2 e $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

- b) Encontre um intervalo de credibilidade com coeficiente de credibilidade γ para σ^2 .
9. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de $X \sim \exp(\theta)$, $E(X) = \theta$. Assuma uma distribuição a priori $\theta \sim X \sim \text{gama-inversa}(r, \lambda)$, com r e λ conhecidos. Obtenha o estimador de Bayes sob perda quadrática e construa um intervalo de credibilidade de $\gamma\%$ para θ .
10. Considere uma amostra aleatória de tamanho 1 de uma uniforme $U(0, \theta)$ com distribuição à priori $\pi(\theta) = \theta e^{-\theta} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(\theta)$
- Responda os itens:
- Mostre que a distribuição a posteriori de θ é dada por $\pi(\theta|x) = e^{-(\theta-x)} \mathbb{1}_{(x, \infty)}(\theta)$
 - Encontre o estimador de Bayes de θ sob perda quadrática.
 - Construa um intervalo de credibilidade de $\gamma\%$ para θ .
11. Seja X uma única observação de $f_X(x; \theta) = \frac{2x}{\theta} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(x)$, $\theta > 0$. Assumindo uma priori $\theta \sim U(0, 1)$ obtenha o estimador de Bayes para θ em relação à função de perda $L(\theta, d) = \theta^2(d - \theta)^2$.

12. Considere uma única observação de X , em que

$$f_X(x; \theta) = \frac{1}{2} \exp(-|x - \theta|) \mathbb{1}_{(-\infty, \infty)}(x), \theta > 0$$

Considerando que a distribuição a priori é $\pi(\theta) = e^{-\theta} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(\theta)$ calcule a distribuição a posteriori e o respectivo estimador de Bayes sob perda quadrática de θ .